انجمن منطق ایران

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سوم و چهارم اسفندماه ۱۴۰۱

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک)

تهران

۱۰

دهمین همایش سالیانه
انجمن منطق ایران

منطق

کتابچه مقالات

انجمن منطق ایران

#IPSP

10a.ir/TbZ

اسکن کنید.

lc1401@ialogic.ir

https://ialogic.ir/

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

برهان افتراض در منطق ربط

اسدالله فلاحی
مؤسسه‌ی پژوهشی حکمت و فلسفه‌ی ایران

چکیده: برهان افتراض را نخستین بار ارسطو در شکل سوم قیاس به کار برده و ابن‌سینا آن را به شکل دوم تعمیم داده است. اثیر الدین ابهری، با توجه به مباحث تعهد وجودی در محصورات ارسطویی، به کاربرد برهان افتراض برای اثبات شکل دوم (ضرب چهارم Baroco) اعتراض کرده و نتیجه گرفته است که این برهان اصولا قابل اعتماد نیست و حداکثر می‌توان آن را برای اقناع و جدل به کار برد. ابن واصل حموی، با توجه به همان مباحث تعهد وجودی در محصورات ارسطویی، به ابهری پاسخ داده و از ابن‌سینا و کاربرد افتراض در شکل دوم بلکه در همه‌ی اشکال دفاع کرده است. شمس الدین اصفهانی، بنا به تعریف ارسطویی از قیاس و اینکه نتیجه‌ی قیاس باید مستقیما از مقدمات قیاس و نه امور دیگری به دست آید، پاسخ ابن واصل به ابهری را، به زبان امروزی، دچار «مغالطه‌ی ربط» می‌داند. با صورت‌بندی ضرب چهارم از شکل دوم در شاخه‌ای از منطق‌های ناکلاسیک امروزی به نام «منطق ربط» می‌بینیم که ایراد اصفهانی به ابن واصل وارد است. شگفت‌تر اینکه با صورت‌بندی ضرب‌های دیگر ارسطویی در منطق ربط، متوجه می‌شویم که همه قیاس‌های ارسطویی از دیدگاه منطق ربط دچار «مغالطه‌ی ربط» هستند. نتیجه‌ای که به دست می‌آید این است که نظام منطقی ارسطویی با منطق ربط امروزی ناسازگار است و برای آشتی میان آنها باید منطق ربط دیگری برساخت.

پیشینهٔ برهان افتراض به ارسطو بازمی‌گردد که آن را برای ضرب اول از شکل سوم، داراپتی (Darapti)، به کار برده است:

هر الف ب است

هر الف ج است

پس برخی ب ج است.

با وجود این، ابن‌سینا (م. ۴۲۸ق.) نخستین کسی است که برهان افتراض را برای ضرب چهارم از شکل دوم، باروکو (Baroco)، به کار می‌برد:

برخی الف ب است

هیچ ج ب نیست

پس برخی الف ج نیست.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

کاربرد برهان افتراض در این ضرب به مناقشاتی در سدهٔ هفتم هجری دامن زده است. در این سده، اثیر الدین ابهری (م. ۶۶۳ق.) منکر درستی برهان افتراض می‌شود زیرا در این ضرب، برهان افتراض بر صغرای سالبه جزئیه اعمال می‌شود که سالبه است و سالبه‌ها، از دیدگاه منطق سینوی، به انتفای موضوع می‌توانند صادق باشند و در این صورت، از دیدگاه ابهری، به دلیل انتفای موضوع، نمی‌توان قاعدهٔ افتراض را روی آن به کار برد.

ابن واصل حموی (۶۰۴-۶۹۷ق.)، شاگرد افضل الدین خونجی (۵۹۰-۶۴۶ق.)، پاسخ می‌دهد که در صورت انتفای موضوع، نتیجهٔ سالبه صادق است و مشکلی پیش نمی‌آید. بنابراین، اعتراض ابهری بی‌جا است و پاسخ داده می‌شود. به زبان منطق جدید، این ضرب را می‌توانیم چنین بنویسیم:

سالبهٔ جزئیه	بعض ج ب نیست	$\exists x\, (Jx \,\&\, \sim Bx) \vee \sim \exists x\, Jx$
موجبهٔ کلیه	هر الف ب است	$\forall x\, (Ax \rightarrow Bx) \,\&\, \exists x\, Ax$
سالبهٔ جزئیه	بعضی ج الف نیست	$\exists x\, (Jx \,\&\, \sim Ax) \vee \sim \exists x\, Jx$

می‌بینیم که در فرض صدق قسمت دوم صغری ($\sim \exists x\, Jx$)، یعنی انتفای موضوع، نتیجه با معرفی فاصل به دست می‌آید و بنابراین، استدلال درست است.

بعدها در سدهٔ هشتم هجری، شمس الدین اصفهانی (م. ۷۴۹ق.) در دفاع از اعتراض ابهری و در پاسخ به ابن واصل مدعی می‌شود که در صورت انتفای موضوع، هرچند نتیجهٔ سالبه صادق است اما صدق این نتیجه ناشی از انتفای موضوع بوده و از دل مقدمات به دست نیامده، و بنابراین، ایراد هم‌چنان وارد است. در واقع می‌توان ملاحظه کرد که پاسخ اصفهانی به ابن واصل مسئلهٔ ارتباط میان مقدمات و نتیجه را مطرح می‌کند و می‌خواهد نشان دهد که برهان افتراض یکی از اصول مهم «استنتاج ربطی» را زیر سوال می‌برد.

اتفاقا، بازنویسی ضرب چهارم از شکل دوم به زبان صوری «منطق ربط» نشان می‌دهد که ایراد اصفهانی کاملا بجا است:

سالبهٔ جزئیه	بعض ج ب نیست	$\exists x\, (Jx \circ \sim Bx) \vee \sim \exists x\, Jx$
موجبهٔ کلیه	هر الف ب است	$\forall x\, (Ax \rightarrow Bx) \,\&\, \exists x\, Ax$
سالبهٔ جزئیه	بعضی ج الف نیست	$\exists x\, (Jx \circ \sim Ax) \vee \sim \exists x\, Jx$

چون در فرض صدق قسمت دوم صغری ($\sim \exists x\, Jx$)، یعنی انتفای موضوع، نتیجه مستقیما به دست می‌آید و کبری هیچ نقشی در اثبات نتیجه ندارد.

اما نکتهٔ شگفت اینکه ارسطو این ضرب را با برهان خلف به ضرب اول از شکل اول، باربارا (Barbara)، برمی‌گرداند:

هر الف ب است

هر ب ج است

پس هر الف ج است.

و با شگفتی بیشتر ملاحظه می‌شود که این ضرب هم، اگر در زبان منطق ربط بازنویسی شود، دچار مغالطهٔ ربط است و در نظریهٔ برهان منطق ربط قابل اثبات نیست:

موجبهٔ کلیه	هر الف ب است	$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)\ \&\ \exists x\, Ax$
موجبهٔ کلیه	هر ب ج است	$\forall x\,(Bx \rightarrow Cx)\ \&\ \exists x\, Bx$
موجبهٔ کلیه	هر الف ب است	$\forall x\,(Ax \rightarrow Cx)\ \&\ \exists x\, Ax$

چون بخش دوم نتیجه ($\exists x\, Ax$) ارتباطی با کبری ندارد بلکه مستقیما از صغری به دست می‌آید.

شاید کسی مدعی شود که ایراد از برهان خلف است که ضرب چهارم از شکل دوم (باروکو) را به ضرب اول از شکل اول (باربارا) برمی‌گرداند. اتفاقا، در منطق شهودگرایی نیز برخی از صورت‌های برهان خلف در معرض تردید قرار دارند و از نظام منطق شهودگرایی کنار گذاشته می‌شوند. چنان که خواهیم دید، صورت‌های دیگری از برهان خلف در منطق ربط نیز نامعتبر هستند. با وجود همهٔ اینها، می‌توان نشان داد که با صور معتبر برهان خلف در منطق ربط، همچنان می‌توان ضرب باروکو را به ضرب باربارا برگداند.

در واقع، با بررسی بیشتر می‌توان نشان داد که همهٔ ضرب‌های منتج در منطق ارسطویی اگر در زبان منطق ربط بازنویسی شوند در این منطق غیر قابل اثبات خواهند بود. نتیجهٔ این ملاحظات این خواهد بود که منطق ارسطویی در واقع نه تنها منطق ربطی نیست بلکه به مغالطات ربط دامن می‌زند. این نتیجه‌ای است سهمگین و به کوه یخ زیر آب می‌ماند که نوک آن را برای نخستین بار شمس الدین اصفهانی در سدهٔ هشتم هجری مشاهده کرده است و امروزه به کمک منطق ربط می‌توانیم تمامیت آن را از زیر آب بیرون کشیده و به نظاره بنشینیم.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

توسعه منطق باوری لوکاشیویچ با اعلان عمومی

دره السادات دستغیب، هادی فراهانی
دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
d_dastgheib@sbu.ac.ir
h_farahani@sbu.ac.ir

چکیده: در این مقاله ما یک منطق باوری لوکاشیویچ $\boldsymbol{B}\text{Ł}^{+}$ که به عملگر جدید $\preccurlyeq$ مجهز شده است معرفی می‌کنیم این عملگر میزان ارزش یک فرمول را نسبت به یک ارزش فازی، به شکل دو ارزشی ارزش‌گذاری می‌کند. سپس برقراری قضایای صحت و تمامیت با توجه به معناشناسی آن را نشان می‌دهیم. سپس منطق $\boldsymbol{B}\text{Ł}^{+}$ را به عملگر اعلان عمومی مجهز می‌کنیم و آن را $\boldsymbol{D}\text{Ł}$ می‌نامیم. پس از آن نشان می‌دهیم که با استفاده از این منطق توسیع یافته می‌توان نسخه فازی معمای کودکان گلی را مدل کرد. همچنین با ارائه نحوه ترجمه بین فرمول‌های $\boldsymbol{D}\text{Ł}$ و $\boldsymbol{B}\text{Ł}^{+}$ چگونگی برقراری قضایای صحت و تمامیت را در این منطق معرفی می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: منطق لوکاشیویچ، منطق معرفتی، منطق باوری، اعلان عمومی

سامانه‌های پویا یکی از ابزارهایی هستند که برای توصیف تحول یک سامانه در طول زمان استفاده می‌شوند. برای تصدیق و تعیین کردن ویژگی‌های یک سامانهٔ پویااز منطق‌های پویا استفاده می‌شود. به عنوان مثال منطق پویای گزاره‌ای[1] به اختصار PDL ویژگی برنامه‌ها، مثل مقایسه قدرت بیان ساختارهای برنامه‌نویسی را توصیف می‌کند [۵۱، ۱۲، ۲۲، ۴۰].

با توجه به آنکه مفاهیم شناختی مثل دانش یا معرفت و باور در طول زمان می‌توانند تغییر کنند، دینامیک سیستم‌هایی که این مفاهیم را مدل می‌کنند به نظر مهم می‌رسند. عبارت منطق شناختی[2] در ابتدا در [۲۴] برای توصیف رده‌ای از منطق‌های وجهی که منطق‌دانان با آن‌ها حالت‌های دانستن را توصیف می‌کردند به کارگرفته شد. اولین تعریف دقیق صوری این مفاهیم را هینتیکا در [۳۲] ارائه داد و عبارت منطق اعتقادی[3] را در منطق‌هایی که از عملگر باور به جای دانش استفاده . [ ]. میان‌رشته‌ای مثل اقتصاد [۵۳]، امنیت [۴۳]، سامانه‌های چندعاملی [۷۱، ۴۲] و علوم اجتماعی [۶۱، ۱۳] این حوزه مورد مطالعه قرار گرفت.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۰:۰۰ (به وقت محلی تهران)
۶:۳۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۳

منطق شناختی پویا نه تنها چگونگی تغییر اطلاعات در طول زمان را توصیف می‌کند بلکه با کمک عملگرهای شناختی این امکان را مهیا می‌سازد که در مورد خود دانش و معرفت بتوانیم استدلال کنیم. در [۳۳] به عنوان یکی از پیشگامان این حوزه، منطق برای اعلان عمومی معرفی شد. در این منطق نحوهٔ تغییر دانش‌عامل‌ها پس از اطلاع از یک گزاره که به صورت اعلان عمومی منتشر شده است، توصیف شد. یک سیستم گنتزن برای منطق اعلان عمومی که بتوان در آن اعلان عمومی غلط نیز در نظر گرفت در [۰۳] معرفی شد. در [۷۲، ۸۲، ۸۳، ۹۳] منطق‌های اعتقادی پویا و بازبینی باور مطالعه شد. همچنین منطق‌های پویایی که در آن‌ها بجای بروز کردن وضعیت‌ها، خود روابط دسترس‌پذیری بروز می‌شوند در [۰۱، ۶۲] مطالعه شده است.از آن جایی که دانش و باور در طول زمان ثابت نیستند و همین‌طور این مفاهیم شامل درجه‌ای از ابهام هستند، به نظر می‌رسد که تفسیر کردن آن‌ها با استفاده از [illegible] [0, 1] [illegible] . [illegible] [[illegible]] [illegible] . همچنین توسیع‌های وجهی منطق‌های وکاشیویچ و منطق ضربی در [۹۱، ۰۲، ۱۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در ادامهٔ این کارها [۶۳] یک منطق شناختی چهارارزشی پویا معرفی کرده است و با استفاده از روش تابلو صحت و تمامیت آن را نشان داده است. یک نمونهٔ n ارزشی از منطق پویای وکاشیویچ نیز در [۱۱] تحت عنوان $\mathbf{ID\L}_n$ معرفی شده است. در [۲۱] توسیع وکاشیویچ از منطق‌های گزاره‌ای پویایی که در [۵۲، ۷۳] ارائه شده بودند مطالعه شده است. در [۲۳] برخی از تعاریف ممکن برای اعلان عمومی در منطق گودل بررسی شده است. یک منطق شناختی پویا مجهز به اعلان عمومی که هم قوانین انتقال و هم گزاره‌ها ارزش فازی اتخاذ می‌کنند در [۲] معرفی شده است. از این یک منطق وکاشیویچ اعتقادی فازی $\mathbf{B\L}$ در [۸] معرفی شده است. در این مقاله ابتدا یک توسیع اعتقادی از منطق وکاشیویچ $\mathbf{B\L}^+$ ارائه می‌کنیم که در آن زبان منطق $\mathbf{B\L}$ را به عملگر $\succeq$ مجهز کرده‌ایم. عملگر $\succeq$ این قابلیت را به زبان اضافه می‌کند که با آن ارزش فرمول‌ها را با یک ارزش ثابت از پیش تعیین‌شده بتوانیم مقایسه کنیم. فرمول $g \succeq \varphi$ زمانی معتبر است که ارزش فازی فرمول φ از مقدار g بیش‌تر باشد و به طور شهودی می‌توان تصمیم گرفت که آیا فرمول φ ویژگی مشخص از پیش تعیین شده‌ای را دارد یا خیر. فرمولی که شامل $\succeq$ باشد، به صورت یک فرمول که ارزش‌های کلاسیک اتخاذ کرده است خواهد بود.

پس از آن یک نسخهٔ جدید از منطق اعتقادی پویا $\mathbf{D\L}$ روی $\mathbf{B\L}^+$ معرفی می‌کنیم. این منطق یک توسیع از منطق اعتقادی است که به عملگر اعلان عمومی تجهیز شده است. در این مقاله ما فرض کرده‌ایم که تمام اعلان‌های عمومی درست هستند و به صورت صریح دربارهٔ فرمول به ما اطلاعات می‌دهند. پس از آن بااستفاده از $\mathbf{D\L}$ یک نسخهٔ فازی از معمای کودکان گلی را مدل می‌کنیم. در نهایت یک ترجمه از $\mathbf{D\L}$ به $\mathbf{B\L}^+$ معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای $\mathbf{D\L}$ قضایای صحت و تمامیت برقرار هستند.

۲ منطق شناختی وکاشیویچ

در این بخش تعاریف اصلی و مواردی که در بخش‌های بعدی لازم است ارائه می‌کنیم. خواننده برای جزئیات بیش‌تر دربارهٔ منطق وکاشیویچ می‌تواند به مرجع [۸۱] مراجعه کند.منطق گزاره‌ای وکاشیویچ توسیعی از منطق پایهٔ $\mathbf{B\,L}$ است

که مجهز به اصل $\neg\neg\varphi \to \varphi$ شده‌است. در ادامه برخی از اصول و ویژگی‌های لازم در منطق فازی وکاشیویچ را یادآوری می‌کنیم:

$$
\begin{array}{lll}
(A1) & (\varphi \& \psi) \to \varphi & \\
(0) & \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi & (1) \quad (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \\
(2) & ((\varphi_1 \to \psi_1) \& (\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2)) & \\
(3) & (\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \chi) \equiv (\psi \to \chi)) & \\
(4) & (\varphi \equiv \psi) \to ((\chi \to \varphi) \equiv (\chi \to \psi)) & (5) \quad (\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \& \chi) \equiv (\psi \& \chi))
\end{array}
$$

در بالا $\varphi \equiv \psi$ به این معناست که φ و ψ دو فرمول هم‌ارزمعنایی هستند و در این مقاله ما از اصل‌های (3)، (4) و (5) تحت عنوان جانشینی یاد خواهیم کرد. همچنین در طول این مقاله مجموعهٔ گزاره‌های اتمی را با استفاده از نماد $\mathcal{P}$ و مجموعهٔ عوامل را با استفاده از $\mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم و از نماد $\bot$ به عنوان گزاره‌ای که همیشه ارزش ثابت ۰ دارد استفاده می‌کنیم. برای بخش معناشناسی از ساختار کریپکی که در ادامه تعریف آن آورده شده است استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۲ یک مدل منطقی وکاشیویچ اعتقادی[۴] یا در اختصار **DŁL**ـ‌مدل یک سه‌تایی به فرم $\mathfrak{M} = (S, r_{a_{a\in\mathcal{A}}}, \pi)$ است که در آن S مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های مدل، $r_{a_{a\in\mathcal{A}}} : S \times S \to [0,1]$ تابع دسترس‌پذیری و $\pi : S \times \mathcal{P} \to [0,1]$ تابع ارزش‌گذاری است که به هر یک از گزاره‌های اتمی در هر وضعیت یک ارزش از بازهٔ $[0,1]$ نسبت می‌دهد. $\triangleright$

پیش از این یک توسیع اعتقادی از منطق وکاشیویچ در [۸] ارائه شد. قبل از آنکه این منطق را به عملگر اعلان عمومی مجهز کنیم، زبان تجهیز شده به عملگر باور شبه‌کلاسیک[۵] در [۸] را به عملگر جدید $\succeq$ مجهز می‌کنیم. این عملگر میزان ارزش یک فرمول را نسبت به یک ارزش فازی، به شکل دو ارزشی ارزش‌گذاری می‌کند. به عبارت دیگر فرمول $\varphi \succeq \nu$ بیان می‌کند که آیا ارزش فازی فرمول φ بزرگتر از مقدار $\nu \in [0,1]$ است یا خیر.

تعریف ۲.۲ زبان منطق اعتقادی وکاشیویچ تغییر یافته که به اختصار آن را با $\mathbf{B}\text{Ł}^+$ نشان می‌دهیم به کمک BNF[۶] زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \succeq g \mid \varphi \& \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid B_a\varphi$$

که در آن $p \in \mathcal{P}$ یک گزارهٔ اتمی، $a \in \mathcal{A}$ یک عامل و g یک سمبل است که نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی متعلق به بازهٔ $[0,1]$ در این زبان است. عملگرهای معمول دیگر مثل $\vee$، $\wedge$ و $\veebar$ تعریفی مشابه منطق وکاشیویچ دارند. $\triangleright$

اگر $\mathfrak{M} = (S, r_{a_{a\in\mathcal{A}}}, \pi)$ یک **DŁL**ـ‌مدل باشد، فرمول $\varphi \succeq g$ که توسط عملگر جدید $\succeq$ ایجاد می‌شود به صورت «φ دست کم به اندازهٔ g ارزش دارد» خوانده می‌شود. برای هر فرمول φ در زبان $\mathbf{B}\text{Ł}^+$ و هر وضعیت s در مدل $\mathfrak{M}$ تابع ارزش‌گذاری توسیع یافتهٔ $V(s,\varphi)$ که توسیعی از π روی فرمول‌هاست به صورت بازگشتی که در ادامه می‌آید تعریف می‌شود. ما برای سادگی بیشتر از $V_s(\varphi)$ بجای $V(s,\varphi)$ استفاده می‌کنیم. همچنین اگر نیاز به تاکید مدل مورد نظر باشد از بالانویس $\mathfrak{M}$ به شکل $V^{\mathfrak{M}}$ بهره‌مند می‌شویم.

$$
\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}(p) = \pi(s,p) \ \ \forall p \in \mathcal{P}, \\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\neg\varphi) = 1 - V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi), \\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = \begin{cases} 1 & V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) \geq g \\ 0 & V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) < g, \end{cases} \\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \,\&\, \psi) = \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) + V_s^{\mathfrak{M}}(\psi) - 1\}, \\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \to \psi) = \min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) + V_s^{\mathfrak{M}}(\psi)\}, \\
&V_s^{\mathfrak{M}}(B_a\varphi) = \inf_{s' \in S} \max\{1 - r_a(s,s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}}(\varphi)\},
\end{aligned}
$$

تعریف ۳.۲ فرض کنید که φ یک فرمول در زبان $\mathbf{B}\text{Ł}^+$ و $\mathfrak{M}$ یک **DŁL**ـ‌مدل باشد. همچنین فرض کنید $s \in S$. گوییم φ یک فرمول معتبر در مدل نقطه‌ای $(\mathfrak{M}, s)$ است اگر $V_s(\varphi) = 1$. اگر برای هر $s \in S$ داشته باشیم $(\mathfrak{M}, s) \vDash \varphi$ می‌گوئیم فرمول φ یک فرمول $\mathfrak{M}$ـ‌معتبر است و از نماد $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ برای آن استفاده می‌کنیم. اگر برای همهٔ مدل‌های ممکن $\mathfrak{M}$ از یک کلاس از مدل‌ها مثل $\mathcal{M}$ رابطهٔ $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ برقرار باشد، آن را با $\mathcal{M} \vDash \varphi$ نشان می‌دهیم و می‌گوئیم فرمول φ $\mathcal{M}$ـ‌معتبر است. در صورتی که برای همهٔ مدل‌های $\mathfrak{M}$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ فرمول φ را معتبر می‌خوانیم و آن را با $\vDash \varphi$ نشان می‌دهیم. $\triangleright$

گزاره ۴.۲. فرمول‌های زیر معتبر هستند:

(i) $(\varphi \& \psi) \succeq g \to (\varphi \succeq g \& \psi \succeq g)$

(ii) $(\varphi \succeq g \& \psi \succeq g') \to (\varphi \succeq g'' \& \psi \succeq g')$ بطوری‌که $g > g''$

در ادامه یک دستگاه اصول موضوعه به نام $\mathbf{BŁ}^+$ مشابه دستگاه $\mathbf{BŁ}$ معرفی‌شده در [۸] معرفی می‌کنیم.

(Ł_B0) تمام نمونه‌های همان‌گو در منطق گزاره‌ای وکاشیویچ

(Ł_B1) $(B\varphi \& B(\varphi \to \psi)) \to (B\psi)$

(Ł_B2) $\neg B \perp$

(Ł_g0) $(\varphi \& \psi) \succeq g \to (\varphi \succeq g \& \psi \succeq g)$

(Ł_g1) $g \geq g''$ به طوری‌که $(\varphi \succeq g \& \psi \succeq g') \to (\varphi \succeq g'' \& \psi \succeq g')$

(R_{MP}) $$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

(R_B) $$\frac{\varphi}{B\varphi}$$

(R_G) $$\frac{\varphi}{\varphi \succeq g}$$

می‌توان دید که در بالا تفاوت منطق $\mathbf{BŁ}$ و $\mathbf{BŁ}^+$ دو اصل (Ł_g0) و (Ł_g1) و همین‌طور قاعدهٔ (R_G) است.

لم ۵.۲. *قاعده‌های استنتاج (R_{MP})، (R_B) و (R_G) به صورت معنایی پذیرفتنی هستند؛ یعنی اگر فرض‌های (R_{MP})، (R_B) و (R_G) معتبر باشند آنگاه نتیجهٔ حاصل شده از آن‌ها نیز معتبر است.*

برهان. با توجه به تعریف واضح است. □

قضیه ۶.۲. *(صحت) فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک کلاس از مدل‌های $\mathbf{BŁ}^+$ باشند. اگر $\vdash_{\mathbf{BŁ}^+} \varphi$ آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi$.*

برهان. به صورت مستقیم از اصل ۱.۳ در [۸]، اصل ۴.۲ و لم ۵.۲ حاصل می‌شود. □

تعریف ۷.۲ اگر $\nvdash_{\mathbf{BŁ}^+} \neg\varphi$ یک فرمول $\mathbf{BŁ}^+$ همچون φ را $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار می‌گوئیم. به یک مجموعهٔ متناهی از فرمول‌های زبان $\mathbf{BŁ}^+$ مانند $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$، $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار گفته می‌شود اگر فرمول $\varphi_1 \& \cdots \& \varphi_n$ یک فرمول $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار باشد. اگر تمام زیرمجموعه‌های متناهی از یک مجموعهٔ نامتناهی مثل Γ از فرمول‌های $\mathbf{BŁ}^+$، $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار باشد، مجموعهٔ Γ، $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار گفته می‌شود. به Γ ماکسیمال و $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار می‌گوئیم اگر دو شرط زیر برای مجموعهٔ نامتناهی Γ برقرار باشد.

۱. مجموعهٔ Γ، $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار باشد.

۲. برای هر فرمول φ در زبان $\mathbf{BŁ}^+$ که $\varphi \notin \Gamma$، مجموعهٔ $\Gamma \cup \{\varphi\}$، $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار نباشد.

$\triangleright$

در ادامه قضایا و لم‌های مورد نیاز برای اثبات تمامیت دستگاه $\mathbf{BŁ}^+$ ارائه می‌شود. اثبات لم‌های ۸.۲ و ۹.۲ و قضیهٔ ۱۰.۲ کاملا مشابه لم‌های ۴.۳ و ۵.۳ و قضیهٔ ۲.۳ در [۸] است.

لم ۸.۲. *برای دستگاه اصل موضوعی $\mathbf{BŁ}^+$ داریم:*

(i) *هر مجموعه از فرمول‌های زبان $\mathbf{BŁ}^+$ مثل Φ که $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار است را می‌توان به یک مجموعهٔ ماکسیمال و $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار توسعه داد.*

(ii) *اگر Φ یک مجموعهٔ $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار باشد، آنگاه برای هر $\mathbf{BŁ}^+$ـفرمول مثل φ و ψ داریم:*

۱. $\varphi \& \psi \in \Phi$ اگر و فقط اگر $\varphi \in \Phi$ و $\psi \in \Phi$
۲. اگر $\varphi \in \Phi$ و $\varphi \to \psi \in \Phi$، آنگاه $\psi \in \Phi$
۳. اگر $\vdash_{\mathbf{BŁ}^+} \varphi$، آنگاه $\varphi \in \Phi$
۴. $\varphi \in \Phi$ یا $\neg\varphi \in \Phi$

لم ۹.۲. *اگر $\Gamma = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ مجموعه‌ای از فرمول‌های زبان $\mathbf{BŁ}^+$ باشد، آنگاه $\Gamma \vdash_{\mathbf{BŁ}^+} \varphi_1 \& \cdots \& \varphi_n$*

قضیه ۱۰.۲. *فرض کنید که Φ یک مجموعهٔ $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار باشد و φ یک $\mathbf{BŁ}^+$ـفرمول باشد که $\Phi \nvdash_{\mathbf{BŁ}^+} \varphi$؛ اگر $\Phi^* = \Phi \cup \{\neg\varphi\}$، آنگاه Φ^* یک مجموعهٔ $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار است.*

لم ۱۱.۲. *اگر Φ یک مجموعهٔ $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار باشد، آنگاه $\{\varphi \succeq g \mid \varphi \in \Phi, g \in (0,1]\}$ یک مجموعهٔ $\mathbf{BŁ}^+$ـسازگار است.*

برهان. اثبات با استفاده از برهان خلف. فرض کنید که Φ یک مجموعه $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار باشد ولی $\Gamma = \{\varphi \succeq g \mid \varphi \in \Phi, g \in (0,1]\}$ یک مجموعهٔ $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار نباشد. بنابراین از تعریف نتیجه می‌شود که یک زیرمجموعهٔ متناهی مثل $\{\varphi_1 \succeq g_1, \cdots, \varphi_n \succeq g_n\} \subseteq \Gamma$ چنان وجود دارد که

$$\vdash_{\mathbf{B\L}^+} \neg(\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n). \qquad (۱)$$

فرض کنید که $g_0 = \max\{g_1, \cdots, g_n\}$ و $\Gamma' = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ باشد. از تعریف $\mathbf{B\L}^+$ـسازگاری Γ و لم ۹.۲ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} \varphi_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n & \\
(2) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} (\varphi_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n) \succeq g_0 & (R_G) \\
(3) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} ((\varphi_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n) \succeq g_0) \to (\varphi_1 \succeq g_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0) & (\text{Ł}_g 0) \\
(4) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} \varphi_1 \succeq g_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0 & (2),(3),(R_{MP}) \\
(5) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} (\varphi_1 \succeq g_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0) \to (\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0) & (\text{Ł}_g 1) \\
(6) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} (\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0) & (4),(5),(R_{MP}) \\
\vdots & & \\
(i) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} (\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n) & \text{مشابه گام‌های } (5),(6) \\
(i+1) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} \neg(\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n) & \text{از ۱} \\
(i+2) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} \neg(\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n) \,\&\, (\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n) & \text{لم ۹.۲}, (i),(i+1) \\
(i+3) & \Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} \bot & \text{جانشینی}, (i+2)
\end{array}$$

سطر آخر اثبات با سازگاری Γ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۲.۲. *فرض کنید که Φ یک مجموعهٔ $\boldsymbol{B\L}^+$ـسازگار باشد و $\Phi \vdash_{\boldsymbol{B\L}^+} \varphi$، که در آن φ یک $\boldsymbol{B\L}^+$ـفرمول است؛ آنگاه یک مدل $\boldsymbol{D\L L}$ مانند $\mathfrak{M}$ و وضعیت s متعلق به مجموعهٔ وضعیت‌های آن وجود دارد که $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) = 1$.*

برهان. کافی است تا برهان قضیهٔ ۳.۳ در [۸] را کمی تغییر دهیم و به گام‌های استقرا حالت $\varphi = \psi \succeq g$ را اضافه کنیم. یعنی برای مدل کانونی $\mathfrak{M}^c = (S^c, r^c, \pi^c)$ و برای هر مجموعهٔ ماکسیمال و $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار مثل Φ^* نشان دهیم که

$$\varphi \in \Phi^* \iff V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\varphi) = 1. \qquad (۲)$$

برای این منظور مدل کانونی $\mathfrak{M}^c$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^c = \left\{ s_{\Phi^*} \;\middle|\; \begin{array}{r} \Phi^* \text{ یک مجموعهٔ } \mathbf{B\L}^+ \text{ـسازگار و ماکسیمال که شامل} \\ \text{یک مجموعهٔ ماکسیمال و } \mathbf{B\L} \text{ـسازگار } \Phi \\ \text{و همهٔ } \varphi \succeq g \text{ که } \varphi \in \Phi \text{ و } g \in (0,1] \end{array} \right\},$$

$$r^c(s_\Phi, s_\Psi) = \begin{cases} 1 & \Phi \backslash B \subseteq \Psi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ; \qquad \Phi \backslash B \stackrel{def}{=} \{\varphi \mid B\varphi \in \Phi\},$$

$$\pi^c(s_\Phi, p) = \begin{cases} 1 & p \in \Phi \\ 0 & p \notin \Phi \end{cases} ; \qquad p \in \mathcal{P}.$$

با کمک استقرا روی φ نشان می‌دهیم که رابطهٔ ۲ برقرار است. ما در اینجا فقط حالت $\varphi = \psi \succeq g$ را بررسی می‌کنیم زیرا مابقی حالات مشابه برهان قضیهٔ ۳.۳ در [۸] هستند.

اثبات سمت رفت. اگر $\psi \in \Phi^*$، آنگاه یک مجموعهٔ ماکسیمال و $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار مثل Φ وجود دارد که $\psi \in \Phi$. پس از تعریف S^c داریم $\psi \in \Phi^*$. بنابراین از فرض استقرا داریم $V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\psi) = 1$. از این رو $V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\psi) \geq g$ که به این معناست که $V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\psi \succeq g) = 1$.

اثبات سمت برگشت. فرض کنید که $V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\psi \succeq g) = 1$ باشد. پس $V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\psi) \geq g$ است. چون تمام فرمول‌ها در مدل کانونی ارزش صفر یا یک دارند، از آخرین عبارت نتیجه می‌شود که $V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\psi) = 1$. در نتیجه از فرض استقرا داریم $\psi \in \Phi^*$ و با استفاده از قاعدهٔ (R_G) داریم $\psi \succeq g \in \Phi^*$. □

تذکر ۱۳.۲

توجه کنید که در مجموعهٔ وضعیت‌های معرفی شده در مدل کانونی $\mathfrak{M}^c$ در اثبات ۱۲.۲، می‌توان مجموعهٔ $\mathbf{B\L}^+$ـسازگاری که شامل Φ^*ای را در نظر گرفت که هم شامل مجموعهٔ ماکسیمال و $\mathbf{B\L}$ـسازگار Φ در $\mathbf{B\L}$ است و هم مجموعهٔ $\{\varphi \succeq g \mid \varphi \in \Phi, g \in (0,1]\}$ باشد. برای این کار کافی است از لم ۱۱.۲ مجموعهٔ $\Phi \cup \{\varphi \succeq g \mid \varphi \in \Phi, g \in (0,1]\}$ یک $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار است را در نظر بگیریم و سپس از لم ۸.۲ قسمت (i) می‌توانیم آن را به یک مجموعهٔ ماکسیمال و $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار توسعه دهیم. ◊

زمان ارائه **سالن ۳۱۱**

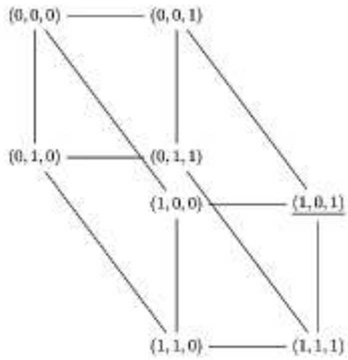
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱

۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)

۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

قضیه ۱۴.۲. *(تمامیت) اگر $\models \varphi$، آنگاه $\vdash_{B\L^+} \varphi$.*

برهان. اثبات با استفاده از برهان خلف. فرض کنید که داریم $\nvdash_{B\L^+} \varphi$. از قضیهٔ ۱۰.۲ یک مجموعهٔ $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار است و از لم ۸.۲ نتیجه می‌شود که یک مجموعهٔ ماکسیمال و $\mathbf{B\L}^+$ـسازگار مثل Φ^* شامل $\{\neg\varphi\}$ وجود دارد. بنابراین از قضیهٔ ۱۲.۲ می‌توانیم نتیجه بگیریم که یک مدل مثل $\mathfrak{M}$ و وضعیت s متعلق به مجموعهٔ وضعیت‌های آن وجود دارد که $V_s^{\mathfrak{M}}(\neg\varphi) = 1$. اما این با $\models \varphi$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □



شکل ۱: وضعیت‌های ممکن در مثال معمای کودکان گِلی حالت کلاسیک.

برای آن که اعلان عمومی را به زبان منطق اعتقادی وکاشیویچ بیافزائیم، یک عملگر جدید به شکل $[\varphi \succeq g]\psi$ معرفی می‌کنیم که چگونگی بروزرسانی فرمول ψ بعد از اعلان عمومی $\varphi \succeq g$ را بیان می‌کند و $[\varphi \succeq g]\psi$ را به صورت «بعد از اعلان عمومی $\varphi \succeq g$، ψ برقرار است» آن را می‌خوانیم.

تعریف ۱.۳ زبان منطق پویای اعتقادی وکاشیویچ[۷] را با استفاده از نماد **DD\L L** نشان می‌دهیم که به کمک BNF زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi ::= \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \succeq g \mid \varphi \& \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid B_a\varphi \mid [\varphi \succeq g]\varphi$$

که در آن $p \in \mathcal{P}$، $a \in \mathcal{A}$ و $g \in [0,1]$ است و دیگر عملگرهای $\vee$، $\wedge$ و $\veebar$ به صورت مشابه منطق وکاشیویچ تعریف می‌شود. علاوه بر این، در ادامه از نماد $\varphi \leftrightarrow \psi$ بجای $(\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)$ استفاده خواهیم کرد. ▷

پیش از ارائهٔ چگونگی ارزش‌دهی به فرمول‌ها در **DD\L L** نحوهٔ بروزرسانی مدل را که چگونگی تغییر وضعیت‌های مدل پس از اعلان $\varphi \succeq g$ را بیان می‌کند شرح می‌دهیم. در این مقاله فرض می‌کنیم که اعلان‌های عمومی همگی درست هستند.

تعریف ۲.۳ فرض کنید که $\mathfrak{M} = (S, r_{a_{|a\in\mathcal{A}}}, \pi)$ یک **D\L L**ـمدل باشد. مدل بروزرسانی شدهٔ $\mathfrak{M}$ بعد از اعلان عمومی $\varphi \succeq g$ را با استفاده از نماد $\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g} = (S^{\varphi\succeq g}, r^{\varphi\succeq g}_{a_{|a\in\mathcal{A}}}, \pi^{\varphi\succeq g})$ نشان می‌دهیم. این مدل به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} S^{\varphi\succeq g} &= \{s \mid s \in S^{\mathfrak{M}}, V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = 1\}, \\ r_a^{\varphi\succeq g}(s, s') &= r_a^{\mathfrak{M}}(s, s'), \qquad \forall s, s' \in S^{\varphi\succeq g}, \\ \pi^{\varphi\succeq g}(s, p) &= \pi^{\mathfrak{M}}(s, p), \qquad \forall s \in S^{\varphi\succeq g},\ p \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

تعریف تابع ارزش‌دهی فرمول‌ها در زبان **DD\L L** مشابه زبان $\mathbf{B\L}^+$ است و ما در اینجا صرفا نحوهٔ ارزش‌دهی فرمول اعلان عمومی یعنی $[\varphi \succeq g]\psi$ را ارائه می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi) = \begin{cases} 1 & V_s(\varphi \succeq g) = 0 \\ V^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi) & otherwise. \end{cases}$$

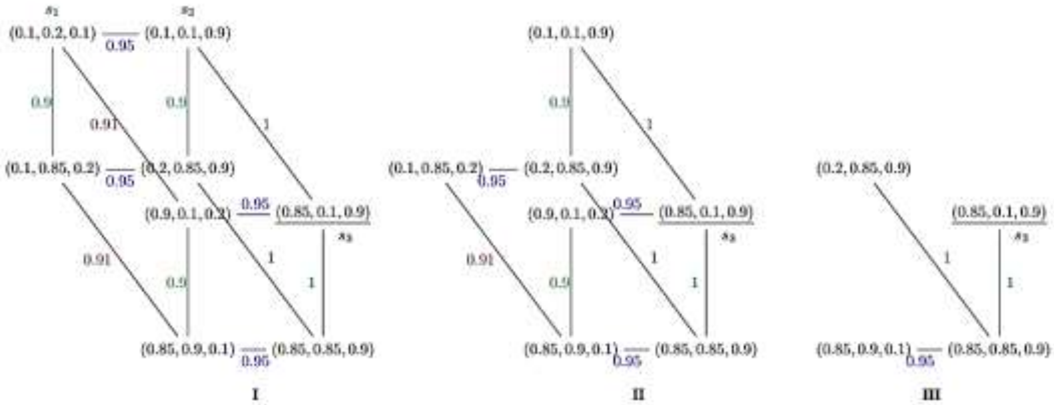
▷

در ادامه نحوهٔ بکارگیری اعلان عمومی را در یک مثال توضیح می‌دهیم.

۱.۳ معمای کودکان گلی

در معمای کودکان گِلی فرض می‌شود که تعدادی کودک در باغچه مشغول بازی هستند و بعضی از آن‌ها گِلی شده‌اند. در این معما کودکان می‌توانند ببینند که آیا پیشانی دیگران گِلی شده است یا خیر اما از گِلی شدن پیشانی خودشان اطلاعی ندارند.

در این مثال، ما فرض می‌کنیم که سه کودک انیس، بابک و کتایون که به ترتیب آن‌ها را با a، b و c نشان می‌دهیم مشغول بازی هستند و وضعیت‌های ممکن گِلی شدن پیشانی هر یک از ایشان را با سه‌تایی (m_a, m_b, m_c) نمایش می‌دهیم که برای $x \in \{a,b,c\}$، $m_x \in [0,1]$ است. در حالت کلاسیک وضعیت‌های ممکن این مدل به صورت شکل ۳ است. اگر برای کمی گِلی بودن، مقداری گِلی بودن و خیلی گِلی بودن به ترتیب بازه‌های $[0,0.25]$، $(0.25,0.75)$ و $[0.75,1]$ را در نظر بگیریم مدلی با بی‌نهایت وضعیت خواهیم داشت. اما به جهت آنکه نمایش مدل بی‌نهایت وضعیتی ممکن نیست به منظور سادگی و نحوهٔ چگونگی بروزرسانی‌ها در اینجا برای نمایش ما یک مدل ساده که در شکل ۱.۳ و مشابه حالت کلاسیک هشت وضعیت آن قابل ملاحظه هست را در نظر گرفته‌ایم. در این شکل رابطهٔ دسترس‌پذیری برای انیس، بابک و کتایون به ترتیب با رنگ‌های قرمز، سبز و آبی نمایش داده شده است و فرض کرده‌ایم که مدل بازتابی و متقارن است.



شکل ۲: بخشی از وضعیت‌های ممکن در مثال معمای کودکان گِلی در حالت کلاسیک.

به عنوان مثال $r_c(s_1, s_2) = 0.95$ یعنی کتایون می‌تواند به سختی می‌تواند تشخیص دهد که «پیشانی بابک *اندکی* گلی است»[۸]، یا اینکه «پیشانی بابک کمی گلی است»[۹] است.

بعد از آنکه پدر یکی از کودکان به ایشان اعلام می‌کند که «دستکم یکی از شما *خیلی گِلی* شده است»، که به صورت فرمال برابر فرمول

$$[\neg(\neg m_a \mathbin{\&} \neg m_b \mathbin{\&} \neg m_c) \succeq 0.8]$$

است، وضعیت s_1 که در آن همهٔ m_xها که $x \in \{a,b,c\}$ کم‌تر از ارزش 0.8 است حذف می‌شود (فرض کرده‌ایم «خیلی گِلی» ارزشش بیش‌تر مساوی ۰.۸ است). شکل ۱.۳ بخش (I) چگونگی وضعیت‌های مدل پس از این اعلان عمومی را نشان می‌دهد. پس از آنکه پدر برای بار دوم این اعلان عمومی را می‌گوید، وضعیت‌های ممکن برای انیس، بابک و کتایون به چهار حالت که در شکل ۱.۳ می‌توان آن را مشاهده کرد کاسته می‌شود. باور کتایون در مورد گِلی بودن پیشانی خودش در مدل اول و سوم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&V_{s_3}^{\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}}(B_c m_c) = \\
&\quad \inf\{\max\{0,0.9\}, \max\{0.05,0.2\}, \max\{1,0.9\}, \max\{1,0.9\}\} = 0.2, \\
&V_{s_3}^{\mathfrak{M}^{\mathrm{II}}}([\neg(\neg m_a \mathbin{\&} \neg m_b \mathbin{\&} \neg m_c) \succeq 0.8] B_c m_c) = 0.2, \\
&V_{s_3}^{\mathfrak{M}^{\mathrm{III}}}([\neg(\neg m_a \mathbin{\&} \neg m_b \mathbin{\&} \neg m_c) \succeq 0.8][\neg(\neg m_a \mathbin{\&} \neg m_b \mathbin{\&} \neg m_c) \succeq 0.8] B_c m_c) = \\
&\quad \inf\{\max\{0,0.9\}, \max\{1,0.9\}\} = 0.9.
\end{aligned}$$

محاسبات بالا نشان می‌دهد که بعد از اعلان عمومی دوم کتایون تقریبا از گِلی بودن پیشانی خودش مطمئن است.

گزاره ۱.۴. طرح‌های زیر از زبان $DDLL$ معتبر هستند:

1. $[\varphi \succeq g]p \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to p)$
2. $[\varphi \succeq g]\neg\psi \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)$
3. $[\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi \leftrightarrow ([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$
4. $[\varphi \succeq g]\psi \to \chi \leftrightarrow [\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)$
5. $[\varphi \succeq g]B_a\psi \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)$

برهان. برای هر یک از موارد نشان می‌دهیم که برای یک مدل دلخواه $\mathfrak{M} = (S, r_{a_{a \in A}}, \pi)$ و وضعیت $s \in S$ طرح ارائه شده معتبر است.
(۱): ابتدا نشان می‌دهیم که سمت $\to$ فرمول را نشان می‌دهیم که معتبر است، یعنی ثابت می‌کنیم که $V_s([\varphi \succeq g]p \to ((\varphi \succeq g) \to p)) = 1$. سمت $\leftarrow$ به صورت مشابه استدلال می‌شود. اگر $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = 0$ آنگاه

$$\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]p \to (\varphi \succeq g \to p)) = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]p) + V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g \to p)\} = \\
&\min\{1, 1 - 1 + 1\} = 1
\end{aligned}$$

پس فرض کنید که $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = 1$. در این حالت داریم $V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]p) = V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(p) = V_s^{\mathfrak{M}}(p)$ و $V_s^{\mathfrak{M}}((\varphi \succeq g) \to p) = V_s^{\mathfrak{M}}(p)$. در نتیجه مجدد ارزش یک حاصل می‌شود زیرا ارزش مقدم و تالی با یکدیگر برابر است.
(۲): فرض کنید که $V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\varphi \succeq g) = 1$. داریم:

$$\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\neg\psi \to ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)) = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\neg\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\neg\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}(\neg[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - 1 + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi) + 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - 1 + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi) + 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi)\} = 1.
\end{aligned}$$

در حالت دیگر اگر $V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\varphi \succeq g) = 0$ باشد، به سادگی می‌توان دید که حکم برقرار است. اثبات سمت $\leftarrow$ مشابه بالا انجام می‌شود.
(۳): فرض کنید که $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = 1$ باشد، چون حالت دیگر واضح است. برای اثبات سمت $\to$ داریم:

$$\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi \to ([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)) = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) + V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi \,\&\, \chi) + \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\chi) - 1\}\} = \\
&\min\{1, 1 - \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi) + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\chi) - 1\} + \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi) + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\chi) - 1\}\} = 1.
\end{aligned}$$

سمت $\leftarrow$ به صورت مشابه اثبات می‌شود.
(۴): به سادگی می‌توان چک کرد که $V_s(\psi \to \chi) = V_s(\neg(\psi \,\&\, \neg\chi))$ و بنابراین حکم برقرار است.
(۵): فرض کنید که $V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\varphi \succeq g) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]B_a\psi \to ((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)) = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]B_a\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]B_a\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}(B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(B_a\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}(B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - \inf_{s' \in S^{\varphi \succeq g}} \max\{1 - r_a^{\varphi \succeq g}(s, s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi)\} + \inf_{s'' \in S^{\mathfrak{M}}} \max\{1 - r_a^{\mathfrak{M}}(s, s''), V_{s''}^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi)\}\} = \\
&\min\{1, 1 - \inf_{s' \in S^{\varphi \succeq g}} \max\{1 - r_a^{\varphi \succeq g}(s, s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi)\} + \inf_{s'' \in S^{\mathfrak{M}}} \max\{1 - r_a^{\mathfrak{M}}(s, s''), V_{s''}^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi)\}\} = 1
\end{aligned}$$

توجه کنید که آخرین رابطه از این حقیقت نشأت گرفته است که وقتی برای وضعیت‌های s'' که در آن‌ها $V_{s''}(\varphi \succeq g) = 0$ داریم $V_{s''}^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi) = 1$ ، پس

$$\inf_{s' \in S^{\varphi \succeq g}} \max\{1 - r_a^{\varphi \succeq g}(s, s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi)\} = \inf_{s'' \in S^{\mathfrak{M}}} \max\{1 - r_a^{\mathfrak{M}}(s, s''), V_{s''}^{\mathfrak{M}^{\varphi \succeq g}}(\psi)\}.$$

سمت $\leftarrow$ به صورت مشابه اثبات می‌شود. $\square$

تعریف ۲.۴ فرض کنید که φ، ψ و χ فرمول‌هایی از زبان **DDŁL** باشد و فرض کنید که $a \in \mathcal{A}$. اصول موضوعهٔ دستگاه **DŁ** برای زبان **DDŁL** را که توسیعی از دستگاه $\mathbf{BŁ}^+$ است به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(Ł_D0) تمام فرمول‌های درست در منطق اعتقادی وکاشیویچ $\mathbf{BŁ}^+$.

(Ł_D1) $[\varphi \succeq g]p \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to p)$

(Ł_D2) $[\varphi \succeq g]\neg\psi \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)$

(Ł_D3) $[\varphi \succeq g](\psi \,\&\, \chi) \leftrightarrow ([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$

(Ł_D4) $[\varphi \succeq g](\psi \to \chi) \leftrightarrow [\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)$

(Ł_D5) $[\varphi \succeq g]B_a\psi \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)$

$\triangleright$

قضیه ۳.۴. *(صحت) دستگاه اصول موضوعهٔ **DŁ** سازگار است.*

برهان. حکم نتیجهٔ مستقیم گزارهٔ ۱.۴ است. $\square$

تعریف ۴.۴ فرض کنید که φ، ψ و χ فرمول‌هایی از زبان **DDŁL** باشد. یک ترجمه از **DDŁL** به **DŁL** تابعی به فرم $t : \mathbf{DDŁL} \to \mathbf{DŁL}$ است که به صورت بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ll}
\forall p \in \mathcal{P} \quad t(p) = p, & t(\neg\varphi) = \neg t(\varphi), \\
t(\varphi \,\&\, \psi) = t(\varphi) \,\&\, t(\psi), & t(\varphi \to \psi) = t(\neg(\varphi \,\&\, \neg\psi)), \\
t(B_a\varphi) = B_a t(\varphi), & t([\varphi \succeq g]p) = t(\varphi \succeq g \to p), \\
t([\varphi \succeq g]\neg\psi) = t(\varphi \succeq g \to \neg[\varphi \succeq g]\psi), & t([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) = t([\varphi \succeq \psi] \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi), \\
t([\varphi \succeq g]\psi \to \chi) = t([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)) & t([\varphi \succeq g]B_a\psi) = t(\varphi \succeq g \to B_a[\varphi \succeq g]\psi).
\end{array}$$

پیچیدگی یک فرمول در زبان **DDŁL** با کمک تابع $c : \mathbf{DDŁL} \to \mathbb{N}$ تعریف می‌شود. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{lll}
c(p) = 1, & c(\neg\varphi) = 1 + c(\varphi), & c(\varphi \succeq g) = 1 + c(\varphi), \\
c(\varphi \,\&\, \psi) = 1 + \max\{c(\varphi), c(\psi)\}, & c(\varphi \to \psi) = 3 + \max\{c(\varphi), c(\psi)\}, & c(B_a\varphi) = 1 + c(\varphi) \\
c([\varphi \succeq g]\psi) = (5 + c(\varphi))c(\psi) & &
\end{array}$$

لم ۵.۴. *برای هر φ، ψ و χ فرمول از زبان **DDŁL** داریم:*

۱. $c(\psi) \geq c(\varphi)$ اگر φ زیر فرمولی از ψ باشد.

۲. $c([\varphi \succeq g]p) > c((\varphi \succeq g) \to p)$

۳. $c([\varphi \succeq g]\neg\psi) > c((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)$

۴. $c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) > c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$

۵. $c([\varphi \succeq g]\psi \to \chi) > c([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi))$

۶. $c([\varphi \succeq g]B_a\psi) > c(\varphi \succeq g \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)$

برهان.

(۱): با استفاده از تعریف واضح است.

(۲): بنا به تعریف داریم $c([\varphi \succeq g]p) = (5 + c(\varphi))c(p)$ که برابر است با $5 + c(\varphi)$. همچنین $c(\varphi \succeq g \to p) = 3 + \max\{c(\varphi \succeq g), c(p)\} = 4 + c(\varphi)$. بنابراین به سادگی می‌توان دید که $c([\varphi \succeq g]p) > c((\varphi \succeq p) \to p)$.

(۳): داریم:

$$\begin{aligned}
c([\varphi \succeq g]\neg\psi) &= (5 + c(\varphi))(1 + c(\psi)) \\
&= 5 + c(\varphi) + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi), \qquad (۳)
\end{aligned}$$

زمان ارائه

چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱

۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)

۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

$$\begin{aligned} c((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi) &= 3 + \max\{c(\varphi \succeq g), c(\neg[\varphi \succeq g]\psi)\} \\ &= 4 + c([\varphi \succeq g]\psi) \\ &= 4 + (5 + c(\varphi))c(\psi) \\ &= 4 + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{۴}$$

می‌توان دید که ۳ با ۴ برابر است.

(۴): بدون خلل در کلیت استدلال فرض کنید که $c(\psi) > c(\chi)$. داریم:

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) &= (5 + c(\varphi))(1 + \max\{c(\psi), c(\chi)\}) \\ &= 5 + c(\varphi) + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi) &= 1 + \max\{c([\varphi \succeq g]\psi), c([\varphi \succeq g]\chi)\} \\ &= 1 + \max\{(5 + c(\varphi))c(\psi), (5 + c(\varphi)c(\chi))\} \\ &= 1 + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{۶}$$

با استفاده از ۵ و ۶ می‌توان بررسی کرد که $c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) > c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$.

(۵): بدون خلل در کلیت استدلال فرض کنید که $c(\psi) > c(\chi)$. داریم:

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq \chi]\psi \to \chi) &= (5 + c(\varphi))(3 + \max\{c(\psi), c(\chi)\}) \\ &= (5 + c(\varphi))(3 + c(\psi)) \\ &= 15 + 5c(\psi) + 3c(\varphi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{۷}$$

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)) &= (5 + c(\varphi))(2 + \max\{c(\psi), 1 + c(\chi)\}) \\ &= (5 + c(\varphi))(2 + c(\psi)) \\ &= 10 + 5c(\psi) + 2c(\varphi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{۸}$$

می‌توان دید که ۷ بزرگ‌تر مساوی ۸ است و بنابراین حکم برقرار است.

(۶): داریم:

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g]B_a\psi) &= (5 + c(\varphi))(1 + c(\psi)) \\ &= 5 + c(\varphi) + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \\ &> 4 + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \\ &> 3 + (1 + (5 + c(\varphi))c(\psi)) \\ &\geq 3 + c(B_a[\varphi \succeq g]\psi) \\ &= 3 + \max\{c(\varphi \succeq g), c(B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} \\ &= ((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi) \end{aligned}$$

لم ۶.۴. *برای هر φ در زبان **DDLL** داریم $\vdash_{\mathrm{DL}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$.*

برهان. با استفاده از استقرا روی $c(\varphi)$ حکم را ثابت می‌کنیم. برای گام پایه فرض کنید که $\varphi = p$ که $p \in \mathcal{P}$ یک گزارهٔ اتمی است باشد. واضح است که $\vdash_{\mathrm{DL}} p \leftrightarrow p$. پس فرض کنید که $c(\varphi) = n$ و حکم برای تمام ψهایی که $c(\psi) < n$ برقرار است. داریم:

حالت $\neg\varphi$: از لم ۵.۴ مورد اول داریم $c(\neg\varphi) > c(\varphi)$. پس از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $\vdash_{\mathrm{DL}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$. در نتیجه با استفاده از استنتاج زیر $\vdash_{\mathrm{DL}} \neg\varphi \leftrightarrow \neg t(\varphi)$ حاصل می‌شود:

(1)	$(\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi)$	فرض استقرا و تعریف $\leftrightarrow$
(2)	$(\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi) \to (\varphi \to \psi)$	$(A1)$
(3)	$(\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	$(A3), (A1)$
(4)	$(\varphi \to \psi)$	$(1), (2), (R_{MP})$
(5)	$(\psi \to \varphi)$	$(1), (3), (R_{MP})$
(6)	$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(0)
(7)	$(\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(0)
(8)	$(\neg\psi \to \neg\varphi)$	$(4), (6), (R_{MP})$
(9)	$(\neg\varphi \to \neg\psi)$	$(5), (7), (R_{MP})$
(10)	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \,\&\, (\neg\varphi \to \neg\psi)$	$(8), (9)$, ۹.۲

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

و درنتیجه با استفاده از تعریف ترجمه داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} \neg\varphi \leftrightarrow t(\neg\varphi)$.

حالت $\varphi \,\&\, \psi$: با استفاده از لم ۵.۴ مورد اول داریم $c(\varphi \,\&\, \psi) \geq c(\varphi)$ و $c(\varphi \,\&\, \psi) \geq c(\psi)$. پس با استفاده فرض استقرا داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ و $\vdash_{\mathbf{DL}} \psi \leftrightarrow t(\psi)$. درنتیجه

(1)	$(\varphi \to t(\varphi)) \,\&\, (t(\varphi) \to \varphi)$	فرض استقرا
(2)	$((\psi \to t(\psi)) \,\&\, (t(\psi) \to \varphi))$	فرض استقرا
(3)	$(\varphi \to t(\varphi)) \,\&\, (t(\varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to t(\varphi))$	$(A1)$
(4)	$(\psi \to t(\psi)) \,\&\, (t(\psi) \to \varphi) \to (\psi \to t(\psi))$	$(A1)$
(5)	$\varphi \to t(\varphi)$	$(1), (3), (R_{MP})$
(6)	$\psi \to t(\psi)$	$(2), (4), (R_{MP})$
(7)	$((\varphi \to t(\varphi)) \,\&\, (\psi \to t(\psi))) \to ((\varphi \,\&\, \psi) \to (t(\varphi) \,\&\, t(\psi)))$	(2)
(8)	$(\varphi \to t(\varphi)) \,\&\, (\psi \to t(\psi))$	$(5), (6)$, ۹.۲
(9)	$(\varphi \,\&\, \psi) \to (t(\varphi) \,\&\, t(\psi))$	$(7), (8), (R_{MP})$
(10)	$(t(\varphi) \,\&\, t(\psi)) \to (\varphi \,\&\, \psi)$	اثباتی مشابه مورد (۹) دارد.
(11)	$((\varphi \,\&\, \psi) \to (t(\varphi) \,\&\, t(\psi))) \,\&\, ((t(\varphi) \,\&\, t(\psi)) \to (\varphi \,\&\, \psi))$	

بنابراین $\vdash_{\mathbf{DL}} \varphi \,\&\, \psi \leftrightarrow t(\varphi) \,\&\, t(\psi)$ و با استفاده از تعریف ترجمه $\vdash_{\mathbf{DL}} \varphi \,\&\, \psi \leftrightarrow t(\varphi \,\&\, \psi)$ حاصل می‌شود.

حالت $[\varphi \succeq g]p$: از لم ۵.۴ قسمت دوم داریم $c([\varphi \succeq g]p) > c((\varphi \succeq g) \to p)$. پس از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $\vdash_{\mathbf{DL}} ((\varphi \succeq g) \to p) \leftrightarrow t((\varphi \succeq g) \to p)$ و در نتیجه از تعریف ترجمه $\vdash_{\mathbf{DL}} ((\varphi \succeq g) \to p) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]p)$ حاصل می‌شود. با به کار بستن $(_D1)$ داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} ([\varphi \succeq g]p) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]p)$.

حالت $[\varphi \succeq g]\neg\psi$: از لم ۵.۴ مورد سوم داریم $c([\varphi \succeq g]\neg\psi) > c((\varphi \succeq g \to \neg[\varphi \succeq g]\psi))$. پس از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $\vdash_{\mathbf{DL}} ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi) \leftrightarrow t((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)$. با استفاده از تعریف ترجمه داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg\psi)$. در نتیجه $\vdash_{\mathbf{DL}} ([\varphi \succeq g]\neg\psi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg\psi)$ با به کار بردن اصل $(\text{Ł}_D۲)$ حاصل می‌شود.

حالت $[\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi$: از لم ۵.۴ مورد چهارم داریم $c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi) \geq c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi)$. در نتیجه از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $\vdash_{\mathbf{DL}} ([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$ و مشابه حالت قبلی با استفاده از تعریف ترجمه و اصل $(\text{Ł}_D۳)$ داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} [\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi)$.

حالت $[\varphi \succeq g]\psi \to \chi$: از لم ۵.۴ مورد پنجم داریم $c([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)) > c([\varphi \succeq g]\psi \to \chi)$. در نتیجه از فرض استقرا $\vdash_{\mathbf{DL}} [\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi))$ نتیجه می‌شود. با به کار بردن اصل $(\text{Ł}_D۴)$، $\vdash_{\mathbf{DL}} [\varphi \succeq g](\psi \to \chi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg(\neg\psi \,\&\, \chi))$ حاصل می‌شود. در نتیجه از تعریف $t([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi))$ داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} [\varphi \succeq g]\psi \to \chi \leftrightarrow t([\varphi \succeq g](\psi \to \chi))$.

حالت $[\varphi \succeq g]B_a\psi$: با استفاده از لم ۵.۴ مورد ششم داریم $c([\varphi \succeq g]B_a\psi) > c((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)$. با استفاده فرض استقرا داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} ((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi) \leftrightarrow t((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)$. مشابه حالات قبلی با به کار بردن اصل $(\text{Ł}_D۵)$ و تعریف ترجمه $t([\varphi \succeq g]B_a\psi)$، $\vdash_{\mathbf{DL}} [\varphi \succeq g]B_a\psi \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]B_a\psi)$ حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۷.۴. *برای تمام فرمول‌های زبان **DDŁL** مثل φ، اگر $\models \varphi$ آنگاه $\vdash_{\mathbf{DL}} \varphi$.*

برهان. فرض کنید که $\models \varphi$. با تعریف ترجمه داریم $\models t(\varphi)$. در نتیجه از تمامیت $\mathbf{BL}^+$ نتیجه می‌شود که $\vdash_{\mathbf{BL}^+} t(\varphi)$. از آنجایی که $\mathbf{BL}^+$ یک زیر دستگاه **DL** است، داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} t(\varphi)$. همچنین از لم ۶.۴ داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$. پس از $\vdash_{\mathbf{DL}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ و $\vdash_{\mathbf{DL}} t(\varphi)$ داریم $\vdash_{\mathbf{DL}} \varphi$. $\square$

نتیجه گیری

در این مقاله ما یک توسیع جدید از منطق اعتقادی وکاشیویچ پویا ارائه کردیم و نشان دادیم که در دستگاه اصول موضوعهٔ معرفی شده برای این منطق قضایای صحت و تمامیت برقرار هستند. همچنین با استفاده از زبان DDŁL نسخهٔ فازی معمای کودکان گلی را مدل کردیم.

[1] R. Aumann, *Interactive epistemology I: Knowledge*. International Journal of Game Theory 28, 263-300 (1999).

[2] M. Benevides, A. Madeira, M. A. Martins, *Graded epistemic logic with public announcement*, Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming, Volume 125, (2022). https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2021.100732.

[3] G. Bonanno, and P. Battigalli, *Recent results on belief, knowledge and the epistemic foundations of game theory*. Research in Economics 53(2), 149-225 (1999).

[4] X. Caicedo, G. Metcalfe, R. O. Rodriguez, and J. Rogger, *A finite model property for Gödel modal logics*, in: L. Libkin, U. Kohlenbach, R. de Queiroz (Eds.) Logic, Language, Information, and Computation. WoLLIC (2013) 226-237. Lecture Notes in Computer Science, V. 8071. Berlin, Heidelberg, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-39992-3_20

[5] X. Caicedo, R. O. Rodriguez, *A Gödel modal logic*, in: Logic, Computability and Randomness, (2004) full text eprint arXiv:0903.2767.

[6] X. Caicedo, R. O. Rodriguez, *Standart Gödel Modal Logics*, Studia Logica **94**, (2010) 189-214.

[7] X. Caicedo, R. O. Rodriguez, *Bi-modal Gödel Logic over [0,1]-valued Kripke frames*, Journal of Logic and Computation, 25 (2012) 37-55. https://doi.org/10.1093/logcom/exs036

[8] D. Dastgheib, H. Farahani, *A Doxastic extension of Łukasiewicz logic*. (2022) https://arxiv.org/abs/2111.08564

[9] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, B. Kooi, Louwe B. Kuijer, *Arbitrary arrow update logic*. Artificial Intelligence, Elsevier 242 (2017) 80-106

[10] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, B. Kooi, Louwe B. Kuijer, *Arbitrary arrow update logic*. Artificial Intelligence, Elsevier 242 (2017) 80-106

[11] A. Di Nola, R. Grigolia, N. Mitskevich, G. Vitale, *Dynamic Lukasiewicz logic and its application to immune system*. https://doi.org/10.1007/s00500-021-05955-3 Soft Computing (2021) 25:9773-9780

[12] A. Di Nola, R. Grigolia, G. Vitale, *Dynamic Lukasiewicz Logic and Dynamic MV-algebras*. International Journal of Approximate Reasoning 124 (2020) 103–110

[13] A. Di Nola, R. Grigolia, *Forensic Dynamic Lukasiewicz Logic*. Transactions on Fuzzy Sets and Systems (2022).

[14] R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi, *Reasoning about Knowledge*. The MIT Press (1995).

[15] M. J. Fischer, *Propositional Dynamic Logic of Regular Program*. Journal of Computer and system science. 18, 194-211 (1979)

[16] H. Gintis, *The Bounds of Reason: Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences*. Princeton University Press (2009).

[17] J. Halpern, and Y. Moses *Knowledge and common knowledge in a distributed environment*. Journal of the ACM 37(3), 549-587 (1990).

سالن ۳۱۱

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

[18] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic* (Springer Netherlands, 1998).

[19] G. Hansoul, B. Teheux, *Completeness results for many-valued Łukasiewicz modal systems and relational semantics*, (2006). arXiv:math.LO/0612542v1

[20] G. Hansoul and B. Teheux, *Extending Łukasiewicz Logics with a Modality: Algebraic approach to relational semantics*, Studia Logica, 101(3), (2013) 505-545.

[21] D. Harel, *First Order Dynamic Logic*, Part of the book series: Lecture Notes in Computer Science (LNCS, volume 68) (1979).

[22] D. Harel, D. Kozen, J. Tiuryn, *Dynamic Logic*. Cambridge: MIT Press, (2000).

[23] J. Hintikka, *Knowledge and belief. An introduction to the logic of the two notions*. Cornell University Press, Ithaca, N.Y., (1962), x 179 pp. Journal of Symbolic Logic, 29(3), 132-134.

[24] W. van der Hoek, and M. Wooldridge *Cooperation, knowledge, and time: Alternating-time temporal epistemic logic and its applications*. Studia Logica 75(1), 125-157 (2003).

[25] D. Kozen, *A representation theorem for models of ∗-free PDL*, In: de Bakker, J., van Leeuwen, J. (eds) Automata, Languages and Programming (1980).

[26] L. B. Kuijer, *Arbitrary Arrow Update Logic with Common Knowledge is neither RE nor co-RE*. In: Proceedings Sixteenth Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge, TARK (2017). https://doi.org/10.4204/EPTCS.251.27

[27] S. Lindström and W. Rabinowicz. *Belief change for introspective agents* (1999).

[28] S. Lindström and W. Rabinowicz. *DDL unlimited: dynamic doxastic logic for introspective agents*. Erkenntnis, 50:353–385, (1999).

[29] J.-J. Meyer, and W. van der Hoek, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*. Cambridge University Press (1995).

[30] S. Negri, and P. Maffezioli, *A proof theoretical perspective on public announcement logic*. Logic and Philosophy of Science (forthcoming).

[31] R. Parikh, *Social software*. Synthese 132, 187-211 (2002).

[32] N. Pischke, A note on publice announcements in standard Godel modal logic. (2021). https://arxiv.org/abs/1707.05872

[33] J. Plaza, *Logics of Public Communications*. In M. L. Emrich, M. S. Pfeifer, M. Hadzikadic, & Z.W. Ras (eds), Proceedings of the fourth international symposium on methodologies for intelligent systems (1989) https://doi.org/10.1007/s11229-007-9168-7

[34] R. Ramanujam, and S. Suresh, *Deciding knowledge properties of security protocols*. In Proceedings of Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge, 219-235 (2005).

[35] L. Samuelson, *Modeling knowledge in economic analysis*. Journal of Economic Literature 57, 367-403 (2004).

[36] Y. D. Santos, *A Four-Valued Dynamic Epistemic Logic*. Journal of Logic, Language and Information. https://doi.org/10.1007/s10849-020-09313-8 (2020) 29:451-489

[37] K. Segerberg, *A completeness theorem in the modal logic of programs*, Not. Am. Math. Soc. 24 (6) (1977).

[38] K. Segerberg. *Default logic as dynamic doxastic logic*. Erkenntnis, 50:333–352, (1999).

[39] K. Segerberg. *Two traditions in the logic of belief: bringing them together*. In: H.J. Ohlbach and U. Reyle, (eds), Logic, Language, and Reasoning, (1999).

[40] B. Teheux, *Propositional dynamic logic for searching games with errors*. Journal of Applied Logic (2014).

[41] A. Vidal, F. Esteva, L. Godo, On Modal Extensions of Product Fuzzy Logic, Journal of Logic and Computation, 27(1), (2017) 299-336. https://doi.org/10.1093/logcom/exv046

[42] G. H. von Wright, *An Essay in model logic*. North Holland Publishing Company, Amsterdam (1951).

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

پارادوکس یابلوی تقویت‌شده و امتناع تسلسل

مهدی اسدی
استادیار فلسفه اسلامی
پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، گروه پژوهشی فلسفه اسلامی و حکمت معاصر
mahdiassadi@ut.ac.ir
M.Assadi@ihcs.ac.ir

چکیده: یابلو بی‌نهایت جمله‌ی دروغ‌گو را کنار هم چیده و نسخه‌ای بی‌نهایت‌وار از پارادوکس دروغ‌گو را پیش‌کشیده‌است به‌گونه‌ای که در آن دور و خودارجاعی وجود ندارد. بیان ساده‌ی جمله‌ی یابلو چنین است: «هیچ یک از جمله‌های بعدی صادق نیست». به نظر ما با بررسی ژرفانه‌ی پارادوکس یابلو و پیش‌کشیدن پارادوکس‌های یابلوی تقویت‌شده در نهایت می‌توان نشان داد که تناقض از اموری چون دور و خودارجاعی برنمی‌خیزد بلکه به این سبب است که تسلسل بی‌پایان محال است.

کلید واژه‌ها: پارادوکس دروغ‌گو، پارادوکس یابلوی تقویت‌شده، منطق چندارزشی، منطق پارادوکس، امتناع تسلسل

مقدّمه

شکل رایج پارادوکس دروغ‌گو شناخته‌شده‌تر از آن است که نیاز به توضیح داشته باشد: (P): P کاذب است. (P) اگر صادق باشد، کاذب است؛ و اگر کاذب باشد، صادق است. پس: صدق P ↔ کذب P. تناقض! بسیاری، به‌ویژه پس از راسل، در حل این پارادوکس بحث دور و خودارجاعی را به‌میان‌آورده و گفته‌اند که تناقض از همین دور و خودارجاعی برمی‌خیزد. استیون یابلو کوشیده است نسخه‌ای بی‌نهایت‌وار از پارادوکس دروغ‌گو (ω-Liar) را پیش‌کشد که در آن دور و خودارجاعی وجود نداشته باشد (Yablo, 1985, p. 340; 1993; 2006). پس ریشه‌ی پارادوکس دیگر به دور و خودارجاعی برنمی‌گردد. ما درصددیم با بررسی بیش‌تر پارادوکس یابلو و تقویت آن نشان دهیم تناقض در این‌جا به این سبب است که تسلسل بی‌پایان محال است. گرچه پیش‌تر این‌را ذیل ارزیابی منطق پارادوکس *بسیار مجمل* اثبات کرده‌ایم (اسدی، ۱۴۰۰، ص ۴۷)، به‌سبب اهمیت فراوان مسأله برای توضیح و تفصیل آن نیازمند کار پژوهشی جداگانه‌ای هستیم تا با افزودن مطالب بیش‌تر عمق برهان کاملاً روشن‌گردد.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۰:۰۰ (به وقت محلی تهران)
۶:۳۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

۲. تقویت پارادوکس یابلو و امتناع تسلسل

بیان ساده‌ی پارادوکس یابلو و امتناع تسلسل بی‌پایان

پارادوکس یابلو به یک بیان ساده چنین است:

P_1: هیچ یک از جمله‌های بعدی صادق نیست. (یعنی هیچ یک از P_2 و P_3 و P_4 و ... صادق نیست.)[۱]

P_2: هیچ یک از جمله‌های بعدی صادق نیست.

P_3: هیچ یک از جمله‌های بعدی صادق نیست.

□

تناقض خود را در این‌جا این‌گونه نشان می‌دهد که، مثلاً، بگوییم: (۱) یا در این دنباله هیچ جمله‌ی صادقی وجود ندارد (۲) و یا این‌که دست‌کم یکی از آن‌ها صادق است.

(۱) اگر فرض‌کنیم در این دنباله هیچ جمله‌ی صادقی وجود نداشته باشد، پس هیچ‌یک از P_1 و P_2 و P_3 و ... صادق نیست. ولی در این صورت (با حذف عطف) به‌دست می‌آید که P_2 و پس از آن صادق نیست: هیچ‌یک از P_2 و P_3 و P_4 و ... صادق نیست. ولی P_1 نیز همین را می‌گوید که «هیچ‌یک از P_2 و P_3 و P_4 و ... صادق نیست». پس P_1 صادق می‌شود. اما این تناقض است: P_1 هم صادق است و هم – طبق فرض (۱) - صادق نیست.

(۲) ولی اگر دست‌کم یکی از جمله‌های این دنباله صادق باشد، پس دست‌کم یک P_k ای وجود دارد که صادق است. اما P_k می‌گوید که P_{k+1} و پس از آن صادق نیست: هیچ‌یک از P_{k+1} و P_{k+2} و P_{k+3} و ... صادق نیست. اکنون (با حذف عطف) به‌دست می‌آید که (آ) P_{k+1} صادق نیست و نیز (ب) هیچ یک از P_{k+2} و P_{k+3} و P_{k+4} و ... صادق نیست. (ب) بدین معنا است که P_{k+2} و پس از آن صادق نیست. ولی P_{k+1} نیز همین را می‌گوید که P_{k+2} و پس از آن صادق نیست: «هیچ یک از P_{k+2} و P_{k+3} و P_{k+4} و ... صادق نیست.» پس P_{k+1} صادق می‌شود. اما این تناقض است: P_{k+1} هم صادق است و هم – طبق (آ) - صادق نیست.

به‌نظر ما با بررسی ژرفانه‌ی پارادوکس یابلو و پیش‌کشیدن پارادوکس‌های یابلوی تقویت‌شده در نهایت می‌توان نشان داد که تسلسل بی‌پایان محال است. یعنی یابلووار فرض کنید که بی‌نهایت چیز، مثلاً بی‌نهایت کاغذ، کنار هم چیده

---

۱ چنان‌که دیده می‌شود آشکارا در P1 هیچ ارجاعی به خود P1 وجود ندارد و آن تنها به جمله‌های بعدی، یعنی به P2 و P3 و P4 و ...، ارجاع می‌دهد. به‌همین‌سان در مورد P2 و P3 و P4 و ...: در آن‌ها نیز هیچ ارجاعی به خودشان وجود ندارد و آن‌ها نیز تنها به جمله‌های پس از خود ارجاع می‌دهند. ولی پریست با تکلف مدعی شده است که در جمله‌های یابلو نیز خودارجاعی وجود دارد (Priest, 1997). این ادعای پریست توسط سورنسن (Sorensen, 1998, pp. 144-145) و دیگران مورد نقد قرار گرفته است.

شده‌اند و روی هر یک نیز (به‌فرض) نوشته شده است که «هیچ یک از جمله‌های نوشته‌شده روی موارد بعدی صادق نیست». پس به‌جای P_1 و P_2 و P_3 و ... بی‌نهایت کاغذ کنار هم می‌چینیم و روی هر یک جمله‌ی یابلو را می‌نویسیم. از آن‌جا که چنین چیزی در نهایت هم در پارادوکس یابلو و هم در پارادوکس‌های یابلوی تقویت‌شده به مشکل برمی‌خورد، چنین تسلسل بی‌پایانی امر محالی است. پس محال است بی‌نهایت چیز بدین صورت وجود داشته باشد. پس پارادوکس یابلوی تقویت‌شده در نهایت می‌تواند برهانی باشد به‌سود امتناع تسلسل و بی‌نهایت کمّی.

توضیح این‌که، اگر بگوییم جمع نقیضان (هم صادق هم کاذب) و رفع نقیضان (نه صادق نه کاذب) هر دو محال است، همان نسخه‌ی رایج پارادوکس یابلو می‌تواند تناقض چنین زنجیره‌ای را نشان‌دهد و نیازی به نسخه‌ی تقویت‌شده نیست. ولی از آن‌جا که در طول تاریخ – هم در جهان اسلام و هم در فلسفه‌ی غرب - در حل پارادوکس دروغ‌گو بارها و بارها پای‌فشرده شده است که جمله‌ی دروغ‌گو نه صادق است و نه کاذب، و بنابراین فاقد ارزش است، پس این‌جا نیز ممکن است برخی راه‌حل چند ارزشی را پیش‌کشند و بگویند که جمله‌های یابلو نه صادق است و نه کاذب.

برای این‌که نشان‌دهیم چنین راه‌حلی – و در واقع نوعی رفع نقیضان – در این‌جا ره به جایی نمی‌برد، می‌توانیم تقریباً همان برهان بالا را به‌گونه‌ای متناسب تکرار نماییم.

پارادوکس یابلوی تقویت‌شده و رد راه‌حل فقدان ارزش

برای تقویت پارادوکس یابلو می‌توانیم به‌سادگی جمله‌ی یابلو را این‌گونه اصلاح کنیم: «جمله‌های بعدی کاذب یا فاقد ارزش هستند». ولی دقت بیش‌تر نشان می‌دهد حتی به این اصلاح هم نیازی نیست. کافی است، پیش از این‌که نشان‌دهیم این راه‌حل چند ارزشی ره به جایی نمی‌برد، توجه داشته باشیم که در دنباله‌ی یابلو اگر جمله‌ای فاقد ارزش باشد، پس به طریق اولی صادق نیست؛ چنان‌که در دنباله‌ی یابلو اگر جمله‌ای کاذب باشد، باز به طریق اولی صادق نیست. اینک می‌گوییم:

(۱) اگر جمله‌های یابلو همگی فاقد ارزش باشند (یا اگر برخی از آن‌ها فاقد ارزش باشند و بقیه کاذب)، در این صورت در دنباله‌ی یادشده هیچ جمله‌ی صادقی وجود ندارد. ولی در تقریر پارادوکس یابلو نشان‌دادیم که در این صورت لازم می‌آید که به‌نحو متناقضی P_1 هم صادق باشد و هم صادق نباشد.

(۲) ولی اگر دست‌کم یکی از جمله‌های یابلو صادق باشد، باز دیدیم که به تناقض می‌رسیم. در این حالت دوم فرقی نمی‌کند چه تعداد از آن جمله‌ها فاقد ارزش است و چه تعداد کاذب؛ تنها کافی است تا دست‌کم یکی از جمله‌های یابلو صادق باشد تا به تناقض برسیم.

پس حاصل (۱) و (۲) این است که به هر نحوی که در میان جمله‌های یابلو جمله‌ی فاقد ارزش وجود داشته باشد باز در نهایت به تناقض می‌رسیم.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

پارادوکس یابلوی تقویت‌شده و رد راه‌حل تناقض‌باوری

اگر منطق تناقض‌باوری را پیش‌نکشیم تاکنون اثبات شد که آن تسلسل متناقض است. ولی اگر منطق تناقض‌باوری را پیش‌بکشیم، بحث در نگاه نخست بسیار پیچیده می‌شود. چه، بر پایه‌ی این منطق تناقض دو گونه است: تناقض محال و تناقض ممکن! پس شاید کسی بگوید تناقضی که در پارادوکس یابلوی تقویت‌شده وجود دارد یک تناقض ممکن است نه یک تناقض محال. پس هنوز امتناع تسلسل اثبات نشده است. برای این‌که این راه‌حل تناقض‌باور را نیز رد کرده باشیم، این بار پارادوکس یابلو را به‌صورت زیر تقویت می‌نماییم:

P_1: هیچ یک از جمله‌های بعدی «تنها صادق» نیست.

P_2: هیچ یک از جمله‌های بعدی «تنها صادق» نیست.

P_3: هیچ یک از جمله‌های بعدی «تنها صادق» نیست.

□

حتی اگر کسی بخواهد به منطق پارادوکس و تناقض‌باوری این حالت چهارم را هم بیافزاید که شاید یک جمله نه صادق باشد و نه کاذب (شریف‌زاده، ۱۳۹۶، صص۱۲۵-۱۲۳؛ برجس، ۱۳۹۵، ص۱۶۰)، باز با همین تقویت می‌توان نشان داد که این منطق تلفیقی چهار ارزشی نیز ره به جایی نمی‌برد.

۳. نتیجه

با بررسی ژرفانه‌ی پارادوکس یابلو و تقویت آن نشان‌دادیم که تسلسل بی‌پایان و بی‌نهایت کمّی محال است و در این پارادوکس چیز دیگری چون دور و خودارجاعی وجود ندارد که باعث تناقض شود. گفتیم که اگر طبق معمول جمع نقیضان و رفع نقیضان را محال بدانیم، همان نسخه‌ی رایج پارادوکس یابلو تناقض چنین زنجیره‌ای را نشان‌می‌دهد و نیازی به نسخه‌ی تقویت‌شده نیست. ولی اگر بگویند که جمله‌های یابلو نه صادق است و نه کاذب، جمله‌ی یابلو را تقویت می‌کنیم و تناقض چنین زنجیره‌ای را نشان‌می‌دهیم: «جمله‌های بعدی کاذب یا فاقد ارزش هستند» - بلکه به این اصلاح و تقویت هم نیازی نیست. حتی اگر کسی برپایه‌ی منطق پارادوکس بگوید تناقض موجود در پارادوکس یابلوی تقویت‌شده یک تناقض ممکن است نه یک تناقض محال، این بار جمله‌ی یابلو را به‌صورت زیر تقویت می‌نماییم: «هیچ یک از جمله‌های بعدی «تنها صادق» نیست.» این تقویت راه‌حل منطق تلفیقی چهار ارزشی را هم زیر سوال می‌برد.

کوتاه این‌که، جمله‌های یابلو اگر متناهی باشند هیچ تناقضی پدید نمی‌آورند. پس از آن‌جا که تناقض تنها در صورتی پدید می‌آید که جمله‌های یابلو نامتناهی باشند و نه متناهی و شهوداً جز زنجیره‌ی نامتناهی چیز دیگری نمانده است که باعث تناقض شود، نتیجه‌ی منطقی این است که تناقض از زنجیره‌ی نامتناهی برمی‌خیزد و نه از چیزی دیگر.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

منابع

اسدی، مهدی (۱۴۰۰) «نقد و بررسی کتاب *خوش‌آمدگویی به تناقض*»، *پژوهش‌نامهٔ انتقادی متون و برنامه‌های علوم انسانی*، سال ۲۱، شماره‌ی ۱۱، صص ۲۱-۴۸.

برجس، الکسیس و جان برجس (۱۳۹۵) *صدق*، ترجمه‌ی: فرشته نباتی، تهران: دانشگاه علامه طباطبایی.

شریف‌زاده، رحمان (۱۳۹۷) *خوشامدگویی به تناقض: جستاری در باب پارادوکس، تناقض و تناقض‌باوری*، تهران: نشر کرگدن.

Bolander, Thomas, Vincent F. Hendricks & Stig Andur Pedersen (2006) *Self-Reference (CSLI Lecture Notes)*, Edited by, Stanford: CSLI Publications (Center for the Study of Language and Information).

Priest, Graham (1997) “Yablo’s Paradox”, *Analysis*, 57(4), pp. 236–242.

Sorensen, Roy A. (1998) “Yablo’s Paradox and Kindred Infinite Liars”, *Mind*, 107 (425), pp. 137-155.

Yablo, Stephen (1993) "Paradox without Self-Reference", *Analysis*, 53 (4), pp. 251–252.

Yablo, Stephen (1985) "Truth and Reflection", *Journal of Philosophical Logic*, 14 (2), pp. 297–348.

Yablo, Stephen (2006) “Circularity and Paradox”, in: Bolander, et al. (2006), pp. 165-183.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

مسائل به‌طورمطلق حل‌ناپذیر و رایانه‌های خارق‌العاده

مرتضی منیری
دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
ezmoniri@gmail.com

چکیده :گودل در سخنرانی‌ای که در سال ۱۹۵۱ ایراد نمود، یک دوگانهٔ فلسفی را در مورد ریاضیات مطرح کرد: یا توانایی‌های ذهن انسان از هر ماشین متناهی فراتر است، و یا مسائل ریاضی از نوع دیوفانتی وجود دارند که به طور مطلق حل‌ناپذیر هستند. ابتدا، در پرتو آراء ففرمن، به بررسی دوگانهٔ فوق می‌پردازیم. سپس برهان پاتنم را بررسی می‌کنیم مبنی بر این که اگر توانایی علمی ذهن انسان را بتوان توسط یک ماشین تورینگ با توانایی تهیهٔ سیاهه‌ای از نتایج علمی شبیه‌سازی کرد، این ماشین جمله‌ای که این توانایی را بیان می‌کند را به عنوان خروجی ارائه نخواهد کرد. در تلاش برای فهم بهتر این برهان، آنرا در حساب شناختی شاپیرو بازسازی می‌کنیم. این نظریه از افزودن عملگر شناختی به حساب مرتبهٔ اول پئانو به دست می‌آید. در ادامه، به امکان خارق‌العاده برای انجام تعدادی بی‌شمار عمل پایه‌ای محاسباتی در زمان متناهی می‌پردازیم. این امکانی است که اخیراً بر اساس نظریه‌های جدید فیزیکی مطرح شده است. استدلال می‌کنیم که به‌خلاف نظر وارن و وکسمن، با فرض تحقق چنین امکانی، حساب متعین خواهد بود، به این معنی که راست یا غلط بودن هر جملهٔ حسابی توضیح‌پذیر خواهد بود.

کلید واژه‌ها:گودل، مسائل به‌طورمطلق حل‌ناپذیر، محاسبات خارق‌العاده، تعین حسابی

مقدمه

گودل در سخنرانی‌ای که در سال ۱۹۵۱ ایراد کرد، یک دوگانهٔ فلسفی در مورد ریاضیات مطرح کرد. در اینجا روایت ففرمن از دیدگاه گودل را شرح می‌دهیم. این دوگانه به شکل زیر است: یا توانایی‌های ذهن انسان از هر ماشین متناهی فراتر است، و یا مسائل ریاضی ملموسی وجود دارند که به‌طورمطلق حل‌ناپذیرند. برای فهم این ادعا می‌بایست چند نکته را در نظر گرفت. اول اینکه در اینجا فرض شده است که ذهن در راه کشف حقایق ریاضی تنها از اصول صحیح ریاضی و قواعد حافظ صحت استفاده می‌کند. دوم اینکه فرض شده است که حساب مرتبهٔ اول پئانو دقیقاً این اصول و قواعد را شامل می‌شود. سوم اینکه منظور از یک ماشین متناهی یک ابزار اثباتی است که دقیقاً (کد) گزاره‌های ریاضی‌ای که توسط ذهن انسان قابل‌اثبات هستند را لیست می‌کند ([۳]).

دوگانهٔ فوق متکی به قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل است. اگر همهٔ ریاضیات توسط یک ماشین متناهی قابل تولید باشد، از آنجا که سازگاری ریاضیات خود یک حقیقت ریاضی مقبول ذهن است و در عین حال توسط خود ماشین اثبات‌ناپذیر

است، حداقل یک گزارهٔ به‌طورمطلق اثبات‌ناپذیر وجود خواهد داشت. از طرف دیگر، بنابه قضیهٔ MRDP، جمله‌ای منطقی که سازگاری ریاضیات را بیان می‌کند، هم‌ارزی برحسب معادلات دیوفانتی دارد، پس در اینجا با مسئله‌ای کاملاً ریاضی‌وار مواجه هستیم.

از دید گودل، موارد یادشده همگی مشخصات ریاضیات ذهنی (subjective) هستند، یعنی ریاضیات وابسته به انسان. اگر ریاضیات عینی (objective) را شامل آن حقایق ریاضی بدانیم که مستقل از انسان و بدون هیچ فرضی درست هستند، دوگانهٔ گودل را به شکل زیر هم می‌توان بیان کرد: یا ریاضیات عینی فراتر از ریاضیات ذهنی است و یا حقایق ریاضی‌ای وجود دارد که به‌طورمطلق اثبات‌ناپذیرند.

البته ففرمن و حتی خود گودل، این امکان را که هر دو بخش این دوگانه درست باشند را رد نمی‌کنند. برای نمونه، فرضیهٔ پیوستار یک نمونه از گزاره‌های ریاضی متعلق به ریاضیات عینی است که ممکن است هیچ‌گاه در مورد آن توافق صورت نگیرد. از طرف دیگر، ماشین متناهی از نوع یادشده نیز ممکن است که شبیه‌سازی خوبی از ذهن بشر نباشد. بر این اساس، ففرمن معتقد است که دوگانهٔ فوق ممکن است چیز زیادی در مورد ذهن انسان نگوید.

پاتنم در نقدی که بر کتاب راجر پنروز با عنوان «سایه‌های ذهن» نوشته است، این فرض را که سازگاری ریاضیات، حقیقتی بی‌تردید برای انسان باشد را زیر سؤال می‌برد ([۱]). به اعتقاد او، حتی اگر بپذیریم که ذهن انسان براساس یک الگوریتم معمولی کار می‌کند، ممکن است این الگوریتم آن‌قدر پیچیده باشد که فهم کامل آن و پذیرفتن بی‌عیب‌ونقص بودنش بسیار دشوار و دست‌نایافتنی باشد. در ادامه به بررسی نظر پاتنم در این مورد و همچنین تأثیر پذیرش ماشینهای محاسب با قدرت فوق‌العاده بر آن خواهیم پرداخت.

پاتنم: ذهن‌ها و ماشینها

پاتنم در [۴] نیز به موضوع ذهن و ماشین پرداخته است. در این مقاله، پاتنم می‌گوید که از چامسکی پرسیده است که «آیا توانایی‌های ذهنی بشر، شامل زبان و علم، را می‌توان توسط یک ماشین تورینگ ارائه کرد؟». جواب چامسکی «آری» بوده است. پاتنم نشان می‌دهد که اگر این ادعا درست باشد، خود این ادعا توسط چنین ماشینی قابل‌اثبات نخواهد بود. در ادامه اثبات مدنظر پاتنم توضیح داده می‌شود.

فرض کنید که Competence این فرضیهٔ تجربی باشد که یک ماشین تورینگ خاص T توانایی علمی ما انسانها را شبیه‌سازی می‌کند. پاتنم نشان می‌دهد که در صورت درستی این فرض، خود آن فاقد توجیه توسط ماشین T، و بنابراین انسان نوعی، خواهد بود. به‌صورت دقیق‌تر، فرض کنید که $\mathrm{Justified}(p)$ به‌ازای گزارهٔ p به این معنی باشد که براساس این شواهد موجود، گزارهٔ p پذیرفتنی است. دراین‌صورت Competence بیان می‌کند که همهٔ موارد لازم در زبان T قابل‌بیان هستند و T سرانجام $\mathrm{Justified}(p)$ را به‌عنوان خروجی اعلام خواهد کرد اگر و تنها اگر $\mathrm{Justified}(p)$ درست باشد. کاری که پاتنم انجام می‌دهد این است که با فرضیاتی معقول ثابت می‌کند که اگر

Competence درست باشد، آن‌گاه ماشین فوق‌الذکر $\text{Justified}(\text{Competence})$ را به‌عنوان خروجی ارائه نخواهد کرد. اثبات پاتنم در زبان طبیعی بیان شده است.

برای بیان واضح‌تر اثبات مدنظر پاتنم آن را در زبان منطق وجهی بازسازی می‌کنیم. با توجه به دو فرض Competence و $\text{Justified}(\text{Competence})$ می‌توان خواص $\text{Justified}(p)$ را با استفاده از زبان منطق وجهی به‌شکل زیر نمایش داد:

اصول و قواعد منطق پایه‌ای نرمال K

$$\Box P \to \Box\Box P$$

$$\neg(\Box P \wedge \Box\neg P)$$

به‌علاوه، بنابر قضیهٔ نقطهٔ ثابت گودل جملهٔ G وجود دارد به‌طوری‌که

$$\neg\Box G \leftrightarrow G$$

توجه کنید که دستگاه منطقی موردنظر پاتنم شامل حساب پئانو است و قضیهٔ نقطهٔ ثابت گودل برای آن برقرار است. از خواص یادشده می‌توان به تناقض رسید. بنابراین، Competence و $\text{Justified}(\text{Competence})$ نمی‌توانند هم‌زمان درست باشند.

رایانه‌های خارق‌العاده

در این بخش به این پرسش می‌پردازیم که، آیا با فرض وجود رایانه‌های خارق‌العاده، مسائل به‌طورمطلق حل‌ناپذیر ریاضی وجود خواهند داشت؟ یک رایانهٔ خارق‌العاده قادر است که تعدادی نامتناهی (شمارا) عملیات ساده محاسباتی را در زمانی متناهی انجام دهد. برای مثال، یک چنین ماشینی قادر است با بررسی همهٔ موارد فرضیهٔ گولدباخ، درستی یا نادرستی آن را بررسی کند. البته، باید دامنهٔ مسائل ریاضی موردنظر را مشخص کرد. برای مثال، فرضیهٔ پیوستار توسط هیچ چنین ماشینی تعیین تکلیف نخواهد شد. در حال حاضر در مورد امکان وجود چنین ماشینهای خارق‌العاده‌ای بر اساس نظریه‌های فیزیکی جدید، بحث‌هایی در جریان است. در این نوشته به موضوع امکان یا عدم امکان وجود فیزیکی چنین ماشینهایی نخواهیم پرداخت. [۵]

وارن و وکسمن ([۶]) معتقدند که وجود رایانه‌های خارق‌العاده، در مورد مسائلی از نوع فرضیهٔ گولدباخ، نقش تعیین‌کننده‌ای ندارند، زیرا این ماشینها نمی‌توانند درستی یا نادرستی آن فرضیه را توضیح دهند و توجیه کنند. کاری که ما انجام خواهیم داد این است که نشان دهیم، برخلاف ادعای وارن و وکسمن، با فرض وجود رایانهٔ خارق‌العاده و تمرکز بر مسائلی حسابی‌ای که در زبان حساب مرتبهٔ اول پئانو بیان‌پذیر هستند، جواب پرسش فوق منفی خواهد بود. برای این منظور، توضیح می‌دهیم که قاعدهٔ ω در حضور رایانه‌های خارق‌العاده، موجه خواهد بود و با توجه به اینکه

افزودن این قاعده به حساب پئانو منجر به نظریه‌ای کامل (complete) خواهد شد، وجود مسائل به‌طورمطلق اثبات‌ناپذیر منتفی است.

قاعدهٔ ω بیان می‌کند که با فرض درستی خاصیتی به‌ازای همهٔ اعداد طبیعی، آن خاصیت به‌ازای هر x درست خواهد بود. البته منظور از یک خاصیت، به سادگی، فرمولی با یک متغیر آزاد در زبان حساب مرتبهٔ اول است. پس نتیجهٔ قاعدهٔ ω در این مورد، فراتر از حکمی به‌ازای هر عدد طبیعی خواهد بود. می‌توان ثابت کرد که تحقیق صحت یا عدم صحت چنین فرمولی به‌ازای یک عدد طبیعی مشخص، توسط رایانهٔ خارق‌العاده امکان‌پذیر است، و همچنین رایانهٔ خارق‌العاده قادر است که همهٔ محاسبات لازم برای بررسی همهٔ حالت‌ها را (به‌طور موازی) در زمانی متناهی انجام دهد ([۲]). بنابراین، در این حالت قاعدهٔ نامتناهی ω پذیرفتنی به‌نظر می‌رسد.

نتیجه‌گیری

دیدیم که همانطور که پاتنم بیان می‌کند، یک ماشین محاسب معمولی که قضایای ریاضی را لیست می‌کند، جمله‌ای که این توانایی را بیان می‌کند را لیست نخواهد کرد. به‌علاوه، اگر ذهن انسان توسط یک ماشین محاسب معمولی شبیه‌سازی شود، مسائلی کاملاً ریاضیاتی وجود خواهند داشت که به‌طورمطلق حل‌ناپذیرند. از طرف دیگر، با فرض امکان ساخت رایانه‌های خارق‌العاده، آنهایی که قادر به انجام بی‌نهایت عملیات حسابی در زمانی متناهی هستند، مسئلهٔ به‌طورمطلق حل‌ناپذیری، حداقل در زمینهٔ حساب، وجود نخواهد داشت.

فهرست منابع

[۱] پاتنم، هیلری (۱۴۰۱)، *هیلری پاتنم: منتخبِ مقاله‌های فلسفی*، تدوین کاوه لاجوردی، تهران: فرهنگ نشر نو.

[۲] منیری، مرتضی (۱۴۰۱)، «آیا حساب متعیّن است؟»، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، دورهٔ ۳۱، شمارهٔ ۲، شمارهٔ پیاپی ۷۱، صص. ۹۷-۱۵۰.

[3] Feferman, Solomon (2006), “Are There Absolutely Unsolvable Problems? Gödel's Dichotomy”, *Philosophia Mathematica*, 14 (2), pp. 134–152.
[4] Putnam, Hilary (2006), “After Gödel”, *Logic Journal of the IGPL*, 14 (5), pp. 745–754.
[5] Manchak, JB; Roberts, Bryan W. (2022), “Supertasks”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.).
[6] Warren, Jared; Waxman, Daniel (2020), “Supertasks and arithmetical truth”, *Philosophical Studies*, 177, pp. 1275–1282.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

پالودن منطق ناسرهٔ ابتنای فاین

داود حسینی
گروه فلسفه و منطق، دانشگاه تربیت مدرس
davood.hosseini@modares.ac.ir

[این اثر تحت حمایت مادی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور(INSF) برگرفته شده از طرح شماره «۴۰۱۳۳۰۷» انجام شده است.]

چکیده: فاین [۲] قصده کرده است که منطق ناسره‌ای برای ابتنا بنا نهد. دروست و فاین [۱] برای این منطق یک سیستم استنتاجی کامل تنظیم کرده‌اند و نیز سمنتیکی ارائه کرده‌اند که این سیستم استنتاجی نسبت به آن صحیح و تمام است.سیستم استنتاجی دروست و فاین با معیارهای متعارف نظریه‌برهانی سیستم مناسبی نیست؛ مشخصاً برش در آن حذف‌پذیر نیست. در اینجا یک حساب رشتهٔ بدون برش برای منطق ناسرهٔ ابتنای کامل ضعیف پیشنهاد می‌کنم و نشان می‌دهم که چگونه سایر مفاهیم ابتنا را می‌توان در این سیستم بازسازی کرد. حاصل کار تحقق این ایده فاین است که ابتنای کامل ضعیف، به معنایی، در میان m مفاهیم مختلف ابتنا از بقیه پایه‌ای تر است.

کلید واژه‌ها: منطق ناسرهٔ ابتنا، ابتنای کامل ضعیف، حساب رشته، حذف برش.

Introduction

The plan is as follows: in section 1 I review deRosset and Fine's proof system for the impure logic of ground [1] and refine it in order to become a well-behaved proof system. In section 2 I introduce and study a cut-free sequent calculus for weak full ground. In section 3 I prove its equivalence with deRosset and Fine's logic. Other notions of ground are reconstructed within the framework of $ILWG$ then.

The logic RFG

In this section I introduce a higher-level sequent calculus for the impure logic of ground that is essentially the same as GG, the logic suggested by deRosset and Fine [1]. I call this calculus RFG (for deRosset-Fine logic of Ground).

Let me begin with the initial definitions and conventions. The base language is a propositional language, $\mathcal{L}$, that includes a countable set of atomic sentences (p_i $i \in \mathbb{N}$) and the logical constants $\neg$, $\wedge$ and $\vee$. The set of formulas of this language is $FORM_{\mathcal{L}}$. I use $A, B, C, \dots$ for elements of $FORM_{\mathcal{L}}$ and $\Gamma, \Delta, \dots$ (possibly with indices) for finite subsets of $FORM_{\mathcal{L}}$. Sometimes a set of formulas is (partly) displayed by listing its members separated by ",". $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ is a covering of Γ whenever $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$.

The grounding language is the extension of $\mathcal{L}$ by four sequent-making operators: $\leq$, $<$, $\preccurlyeq$ and $\prec$ and one second-level-sequent-making operator $\Vdash$. The following are grounding sequents and their ordinary readings:

$\Gamma \leq A$: Γ is a weak full ground for A

$\Gamma < A$: Γ is a strict full ground for A

$A \preccurlyeq B$: A is a weak partial ground for B

$A \prec B$: A is a strict partial ground for B

I use s and t (possibly with indices) for grounding sequents and S and T (possibly with indices) for a set of grounding sequents. Sometimes a set of grounding sequents is (partly) displayed by listing its members separated by ";". $S \Vdash T$ is a second-level sequent. Intuitively, in $S \Vdash T$ we read S (the antecedent of the second-level sequent) conjunctively and T (its succedent) disjunctively. When I write A/B (or s/t), I mean that the relevant piece of text can be read with both of them.

Definition 1.1 RFG is the second-level sequent system that includes the following rules and axioms:

Pure Axioms of ground:

$Identity$	$s \Vdash s$	
$Subsumption$	$A, \Gamma \leq B \Vdash A \preccurlyeq B$	$A, \Gamma < B \Vdash A \prec B$
	$\Gamma < A \Vdash \Gamma \leq A$	$A \prec B \Vdash A \preccurlyeq B$
$Transitivity$	$A \preccurlyeq B; B \preccurlyeq C \Vdash A \preccurlyeq C$	$A \preccurlyeq B; B \prec C \Vdash A \prec C$
$Irreversibility$	$A \preccurlyeq B \Vdash A \prec B; B \preccurlyeq A$	
$Reflexivity$	$\Vdash A \leq A$	
$Non-circularity$	$A \prec A \Vdash$	
$Cut-axiom$	$\Gamma \leq A; A, \Delta \leq B \Vdash \Gamma, \Delta \leq B$	
$Revers\ subsumption$	$A_1, \dots, A_n \leq B; A_1 \prec B; \dots; A_n \prec B \Vdash A_1, \dots, A_n < B$	

Impure axioms of ground:

$$\Vdash A < \neg\neg A \qquad \Gamma < \neg\neg A \Vdash \Gamma \leq A$$
$$\Vdash A/B < A \vee B \qquad \Gamma < A \vee B \Vdash \Gamma \leq A; \Gamma \leq B; \Gamma < A \wedge B$$
$$\Vdash A, B < A \wedge B \qquad \Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A \,/\, \Gamma_1' \leq B; \dots; \Gamma_k \leq A \,/\, \Gamma_k' \leq B$$
$$\Vdash \neg A/\neg B < \neg(A \wedge B) \qquad \Gamma < \neg(A \wedge B) \Vdash \Gamma \leq \neg A; \Gamma \leq \neg B; \Gamma < \neg(A \vee B)$$
$$\Vdash \neg A, \neg B < \neg(A \vee B) \qquad \Gamma < \neg(A \vee B) \Vdash \Gamma_1 \leq \neg A \,/\, \Gamma_1' \leq \neg B; \dots; \Gamma_k \leq \neg A \,/\, \Gamma_k' \leq \neg B$$

in which $\langle \Gamma_1, \Gamma_1' \rangle, \dots, \langle \Gamma_k, \Gamma_k' \rangle$ *are all of the coverings of* Γ.

Rules:

$$\frac{S \Vdash T}{S; S' \Vdash T; T'}\, Weakening \qquad \frac{S \Vdash T; s \quad s; S' \Vdash T'}{S; S' \Vdash T; T'}\, Cut-rule$$

In case $S \Vdash T$ *is derivable in* RFG *(that is defined as usual) we write* $RFG \vdash S \Vdash T$. *We say that a grounding sequent* s *is a theorem of* RFG *when* $RFG \vdash\Vdash s$.

The main difference between GG, the original proof system of deRosset and Fine [], and RFG is that instead of the axioms

$$\Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A \,/\, \Gamma_1' \leq B; \dots; \Gamma_k \leq A \,/\, \Gamma_k' \leq B$$
$$\Gamma < \neg(A \vee B) \Vdash \Gamma_1 \leq \neg A \,/\, \Gamma_1' \leq \neg B; \dots; \Gamma_k \leq \neg A \,/\, \Gamma_k' \leq \neg B$$

RFG includes, respectively:

$$\Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A; \Gamma_1' \leq B | \dots | \Gamma_k \leq A; \Gamma_k' \leq B$$
$$\Gamma < \neg(A \vee B) \Vdash \Gamma_1 \leq \neg A; \Gamma_1' \leq \neg B | \dots | \Gamma_k \leq \neg A; \Gamma_k' \leq \neg B$$

$S \Vdash T_1 | \dots | T_n$ (for $n > 1$) is a new data structure that is definable in terms of $S \Vdash T$, *semantically*. Recall that we read the antecedent of a second-level sequent conjunctively and its succedent disjunctively. Suppose one constructs a semantics that is appropriate for this intuitive reading: $S \Vdash T$ would be satisfied in a model whenever if every member of S is satisfied in the model, then at least one member of T is so.

Definition 1.2 $S \Vdash T_1 | \dots | T_n$ *(for* $n > 1$*) is* satisfied *in a model of* GG *iff for some* $1 \leq i \leq n$, $S \Vdash t$ *is satisfied in the model for all* $t \in T_i$.

Lemma 1.3 *In a model of* GG, *all* $S \Vdash s_1; \dots; s_n$ *for every* $s_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$ $(n > 1)$ *are satisfied iff for some* $1 \leq j \leq n$ *all* $S \Vdash s$ *are satisfied for every* $s \in S_j$.

Corollary 1.4 $\Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A \,/\, \Gamma_1' \leq B; \dots; \Gamma_k \leq A \,/\, \Gamma_k' \leq B$ *is semantically equivalent to* $\Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A; \Gamma_1' \leq B | \dots | \Gamma_k \leq A; \Gamma_k' \leq B$, *in which* $\langle \Gamma_1, \Gamma_1' \rangle, \dots, \langle \Gamma_k, \Gamma_k' \rangle$ *are all of the coverings of* Γ. *Similarly, for* $\Gamma < \neg(A \vee B) \Vdash \Gamma_1 \leq \neg A \,/\, \Gamma_1' \leq \neg B; \dots; \Gamma_k \leq \neg A \,/\, \Gamma_k' \leq \neg B$.

Corollary 1.5 *RFG and GG are semantically equivalent. Hence, RFG is sound and complete with respect to the semantics introduced by deRosset and Fine.*

After all, both of these proof systems suffer from a common weakness.

Theorem 1.6 *$Cut - rule$ is not eliminable in RFG (neither in GG).*

The sequent system $ILWG$

All conventions and definitions for the base language of RFG mentioned at the beginning of the previous section are assumed here. In addition, $w(A)$ is the number of occurrences of logical constants in A. Other relevant notions, such as the height of a derivation, etc., are defined as usual. The grounding language is derived by adding $\Rightarrow$ to $\mathcal{L}$ and $\Gamma \Rightarrow A$ is the only sequent. Intuitively, $\Gamma \Rightarrow A$ means Γ is a weak full ground for A.

Definition 2.1 $ILWG$ is the sequent system containing the following rules and axiom:

Axiom:

$A \Rightarrow A$ $Identity$

Structural Rules:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A} Mingle$$

Operational Rules:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A} \Rightarrow \neg\neg$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B} \Rightarrow \wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A/B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \Rightarrow \vee$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \neg A/\neg B}{\Gamma \Rightarrow \neg(A \wedge B)} \Rightarrow \neg\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \neg A \quad \Delta \Rightarrow \neg B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \neg(A \vee B)} \Rightarrow \neg\vee$$

Derivability of $\Gamma \Rightarrow A$ is defined as usual and denoted by $ILWG \vdash \Gamma \Rightarrow A$ or simply by $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ when no ambiguity arises.

Definition 2.2 $R(A)$, the class of sufficient reasons for A, is recursively defined as follows:

$$\{A\} \in R(A)$$

If $A = B \wedge C$ *then* $\{B, C\} \in R(A)$

If $A = B \vee C$ *then* $\{B\} \in R(A)$ *and* $\{C\} \in R(A)$

If $A = \neg\neg B$ *then* $\{B\} \in R(A)$

If $A = \neg(B \wedge C)$ *then* $\{\neg B\} \in R(A)$ *and* $\{\neg C\} \in R(A)$

If $A = \neg(B \vee C)$ *then* $\{\neg B, \neg C\} \in R(A)$

If $\Gamma \in R(A)$ *and* $\Delta \in R(A)$ *then* $\Gamma \cup \Delta \in R(A)$

If $\Gamma \in R(A)$ *and* $\Gamma_B \in R(B)$ *for every* $B \in \Gamma$ *then* $\bigcup_{B\in\Gamma} \Gamma_B \in R(A)$.

Theorem 2.3 (Characterization) $ILWG \vdash \Gamma \Rightarrow A$ *iff* $\Gamma \in R(A)$.

Theorem 2.4 (Cut-Admissibility) *Cut is admissible in* $ILWG$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C \quad C, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}\, Cut$$

$ILWG$ and RFG

In this section I prove that $ILWG$ and RFG are equivalent in a significant sense. Namely, $\Gamma \leq A$ is a theorem of RFG iff $\Gamma \Rightarrow A$ is derivable in $ILWG$. This shows thatthe two logics are essentially the same, as far as we concerned with the logic of weak full ground. A side-effect of this equivalence theorem is that other notions of ground can be reconstructed, in a sense, within $ILWG$.

Definition 3.1

$\Gamma \leq A$ *is* verifiable in $ILWG$ *whenever* $ILWG \vdash \Gamma \Rightarrow A$.

$\Gamma < A$ *is* verifiable in $ILWG$ *whenever* $ILWG \vdash \Gamma \Rightarrow A$ *and* $A \notin \Gamma$.

$A \preccurlyeq B$ *is* verifiable in $ILWG$ *whenever for some* Γ, $ILWG \vdash A, \Gamma \Rightarrow B$.

$A \prec B$ *is* verifiable in $ILWG$ *whenever for some* Γ, $ILWG \vdash A, \Gamma \Rightarrow B$ *and* $B \notin \Gamma \cup \{A\}$.

Lemma 3.2

$GG \vdash\Vdash \Gamma \leq A$ *iff* $\Gamma \leq A$ *is verifiable in* $ILWG$.

$GG \vdash\Vdash \Gamma < A$ *iff* $\Gamma < A$ *is verifiable in* $ILWG$.

$GG \vdash\Vdash A \preccurlyeq B$ *iff* $A \preccurlyeq B$ *is verifiable in* $ILWG$.

$GG \vdash\Vdash A \prec B$ *iff* $A \prec B$ *is verifiable in* $ILWG$.

Theorem 3.3 (Equivalence) $RFG \vdash\Vdash \Gamma \leq A$ iff $ILWG \vdash \Gamma \Rightarrow A$.

This establishes the equivalence of RFG and $ILWG$ restricted to the logic of weak full ground. But one can go one step further and claim something more. The lemma 3.3 shows that whenever $\Gamma < A$ is a theorem of RFG the sequent $\Gamma \Rightarrow A$ is derivable in $ILWG$ and $A \notin \Gamma$. That is to say, $ILWG$ characterizes the logic of strict full ground in its metalanguage. Likewise for weak partial and strict partial ground. The upshot is that not only is $ILWG$ the logic for weak full ground, but it also provides a framework in which one can characterize the logical behavior of other notions of ground. $ILWG$, is a rigorous realization of Fine's contention that weak full ground is, in a sense, the most basic notion [2].

Reference

deRosset, L., Fine, K. (2022). A Semantics for the Impure Logic of Ground. *Journal of Philosophical Logic*. https://doi.org/10.1007/s10992-022-09676-2

Fine, K. (2012b). Guide to ground. In F. Correia & B. Schnieder (Eds.), *Metaphysical grounding: understanding the structure of reality* (pp. 37–80). Cambridge: Cambridge University Press.

Adding Highly Generic Subsets of ω2

روح الله حسینی نوه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

r.hoseini.nave@gmail.com

چکیده: فرض کنیم که V یک مدل از نظریه مجموعه‌ها باشد که در آن فرضیه پیوستار تعمیم‌یافته (GCH) برقرار است. ما با معرفی یک مفهوم فورسینگ، یک مدل توسعه‌یافته $V[G]$ ارائه خواهیم داد که در آن همه کاردینال‌ها و همچنین فرضیه پیوستار تعمیم‌یافته حفظ خواهند شد به طوری که یک مجموعه $A \subset \omega_2$ از کاردینال $\aleph_2$ وجود داشته باشد که برای هر مجموعه شمارای $X \subset \omega_2$ متعلق به V، هم $X \setminus A$ و هم $X \cap A$ ناتهی باشند.

کلمات کلیدی: فورسینگ با شروط جانبی، ماتریس‌هایی از زیرساختارهای مقدماتی

Starting from the GCH, we build a cardinal and GCH preserving generic extension of the universe, in which there exists a set $A \subseteq \omega_2$ of size $\aleph_2$ so that every countable subset of A or $\omega_2 \setminus A$ is Cohen generic over the ground model.

It is clear that if $\kappa \geq \aleph_0$ is an infinite cardinal, then the Cohen forcing $\mathbb{P}_\kappa = \{p : \kappa \longrightarrow 2 : |p| < \aleph_0\}$ forces the existence of a set $A \subseteq \kappa$ of size κ such that $X \cap A$ and $X \setminus A$ are non-empty for all countable ground model sets $X \subseteq \kappa$. It also forces $2^{\aleph_0} \geq \kappa$, hence for $\kappa \geq \aleph_2$, the GCH fails in the extension. Moti Gitik asked the following natural question:

Suppose that the GCH holds and $\kappa \geq \aleph_2$ is a cardinal. Is there a cardinal and GCH preserving extension of the universe in which there exists a set $A \subseteq \kappa$ of size κ, such that for all countable sets $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap V$, $X \cap A$ and $X \setminus A$ are nonempty?

In this paper which is a joint work with Esfandiar Eslami and Mohammad Golshani, we use Todorcevic's forcing with matrices of countable elementary substructures $(\mathbb{P}^M_\in)$ to answer the question for the case $\kappa = \aleph_2$.

Fix a well-ordering of H_{ω_2} and set $\mathcal{S} = \{M \in [H_{\omega_2}]^{\aleph_0} : M \prec H_{\omega_2}\}$ which is a stationary subset of $[H_{\omega_2}]^{\aleph_0}$. A condition p of forcing notion $\mathbb{P}$ is a pair $\langle \mathcal{M}_p, f_p \rangle$, whenever:

(i) $\mathcal{M}_p \in \mathbb{P}^M_\in$;

(ii) $f_p : \omega_2 \longrightarrow 2$ is a finite partial function;

(iii) If $M, N \in \mathcal{M}_p$ with $M \cap \omega_1 = N \cap \omega_1$, then

- $\alpha \in (dom(f_p) \cap M) \Rightarrow \varphi_{M,N}(\alpha) \in dom(f_p)$,
- for each α as above, $f_p(\varphi_{M,N}(\alpha)) = f_p(\alpha)$.

For $p, q \in \mathbb{P}$, we say $p \leq q$ if and only if $\mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_p$ and $f_q \subseteq f_p$.

The forcing notion $\mathbb{P}$ preserves the GCH and cardinals. Now let G be a $\mathbb{P}$-generic filter over V and set $A = \{f_p(\alpha) : p \in G, \alpha \in dom(f_p)\}$. Then A is a subset of ω_2 of size $\aleph_2$ which satisfies all the requirements

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics & Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

تفاوت‌های اساسی و بنیادی منطق قدیم و منطق جدید

مرتضی حاجی‌حسینی

عضو هیأت علمی گروه فلسفه دانشگاه اصفهان

mtzh.hosseini2006@yahoo.com

چکیده: در این مقاله بر خلاف دیدگاه بیشتر منطق‌دانان که منطق جدید را صورت بسط یافتهٔ منطق قدیم می‌دانند و با معیار قراردادن منطق جدید و استفاده از ظرفیت‌ها و توانایی‌های آن با شگردهای مختلف به صورت‌بندی و ارزیابی قیاس‌ها و استدلال‌های منطق قدیم پرداخته و گاهی از اشتباهات نهان و آشکار منطق قدیم سخن رانده‌اند، نگارنده براین باور است که منطق قدیم هم در سطح مبانی و هم در سطح نحو و نظریه دلالت، تفاوت‌های جدی و اساسی با منطق جدید دارد و روا نیست با نادیده گرفتن این تفاوت‌ها و معیار قرادادن منطق جدید به ارزیابی منطق قدیم بپردازیم و منطق قدیم را به اشتباهاتی فاحش متهم نماییم که حتی از نوآموزان منطق هم انتظار نمی‌رود مرتکب آن‌ها شوند. بر اساس این دیدگاه، منطق قدیم در سطح مبانی در شناسایی انواع جمله‌های پایه و ملاک معنی‌داری آن‌ها، اصول موضوعهٔ استنتاج و تعریف درستی و اعتبار استدلال و در سطح نحو در معرفی قاعده‌های استنتاج و صورت‌بندی نوع رابطهٔ مقدمه‌ها با نتیجهٔ استدلال و در سطح نظریهٔ دلالت در بیان شروط صدق جملات پایه و شفافیت یا عدم شفافبت مصداقی و ارجاعی آن‌ها با منطق جدید تفاوت‌های اساسی دارد که در این مقاله به تفصیل به هر یک خواهم پرداخت.

کلید واژه‌ها: منطق سینوی، منطق کلاسیک، جمله‌های پایه و ملاک معنی‌داری آن‌ها، اصول موضوعهٔ استنتاج، درستی و اعتبار استدلال، قاعده‌های استنتاج، قضیهٔ استنتاج، شروط صدق جمله‌ها، شفافیت مصداقی، شفافیت ارجاعی

تاکنون مکتوبات، سخنرانی‌ها و بحث‌های فراوانی پیرامون تطبیق و مقایسه نظام‌های منطقی قدیم با نظام کلاسیک منطق جدید صورت گرفته است. منظور از نظام‌های منطقی قدیم، نظام ارسطویی و نظام سینوی و منظور از نظام کلاسیک منطق جدید، نظام‌های کلاسیک و نیمه‌کلاسیک است. در این مقام، هر کس از زاویه‌ای به بررسی تفاوت‌ها و شباهت‌های منطق قدیم و جدید پرداخته است. ایدهٔ غالب در این بحث‌ها اما تایید مشابهت‌های بسیار بین این دو و بنابراین عدم تفاوت فاحش آن‌ها است. مزید بر این بر این، بر اشتباهات نهان و آشکار منطق قدیم در برخی مباحث نیز تاکید شده و از ظرفیت و توانایی منطق جدید در صورت‌بندی و اثبات قیاس‌ها و استدلال‌های بیشتر نیز ستایش شده و در این راستا انواع قیاس‌ها و استدلال‌های منطق قدیم به کمک منطق جدید و با انواع شگردهای منطقی صورت‌بندی است. نویسنده اما این دو نظام منطقی را از اساس و بنیاد متمایز می‌داند و در بحث پیش‌رو به وجوه مختلف تمایز آن‌ها می‌پردازد. محور این تمایزها از این قرار است: ملاک معنی داری و شروط صدق جملات، نوع جملات مورد بحث و شفافیت

یا عدم شفافیت مصداقی و ارجاعی آن‌ها، اصول موضوعهٔ استنتاج، تعریف درستی و اعتبار استدلال، شیوه‌های اثبات، قاعده‌های استنتاج و صورت‌بندی استنتاج

۱- در منطق تنها با صورت استدلال‌ها سروکار داریم تا از هر گونه درگیری با معنا و محتوای گزاره‌هایی که به عنوان مقدمه یا نتیجه در استدلال به کار رفته است، اجتناب کنیم و نتیجه‌ای که از استدلال به دست می‌آوریم از اعتبار صوری لازم برخوردار باشد؛ بنابراین، اولین گام در منطق، جداسازی صورت از معنی گزاره‌ها است. این جداسازی اما به این معنی نیست که از هر گونه ورود به معنی اجتناب کنیم چه رسد به اینکه برای پرهیز از درگیری با معنی، جملات بی‌معنی را معنی‌دار یا برخی جملات معنی‌دار را نادیده بگیریم. برای مثال در منطق محمول‌ها شناسایی و تشخیص اوصاف از نسبت‌ها و صورت‌بندی اوصاف با محمول‌نشانه‌های یک موضعی و صورت‌بندی نسبت‌ها با محمول‌نشانه‌های دو موضعی و بیشتر بدون ورود به معنی امکان‌پذیر نیست. همین‌طور صورت‌بندی اوصاف معین در منطق محمول‌ها و اسامی خاص در برخی نظام‌های منطق موجهات. در مواردی نیز عدم ورود به معنی موجب بروز اشتباه و استنتاج نتایج ناصواب می‌شود مثل جملهٔ «مریم ازدواج کرد و صاحب فرزند شد» که به این معنی است که «مریم ازدواج کرد و از این ازدواج صاحب فرزند شد».

تفاوت منطق قدیم و کلاسیک اما در این است که در منطق کلاسیک بر خلاف منطق قدیم، هر جملهٔ خوش ساخت، معنی‌دار به شمار می‌آید و شروط صدق جملات مرکب تابع‌ارزشی نقیض، عطفی، فصلی و شرطی، شرط معناداری جملات مرکب در منطق پایهٔ گزاره‌ها به شمار می‌آید. با این ملاک، برخی جملات فاقد معنی در زبان طبیعی، در زبان منطق کلاسیک معنی‌دار به شمار می‌آیند و برخی جملات غیرتابع‌ارزشی اگر فاقد معنی تلقی نشوند، یا به فهم تابع‌ارزشی از آن‌ها بسنده می‌شود یا توصیه می‌شود با توسل به منطق‌های مکمل، تحلیل و صورت‌بندی شوند که البته تاکنون در این خصوص توفیق کافی حاصل نشده است. مزید بر اینکه این منطق، خارج از عرف ضوابط ساخت جملهٔ معنی‌دار در زبان طبیعی، در ساخت جملات مرکب دخالت می‌کند و جملاتی را که فاقد معنی محصلی در زبان طبیعی هستند، می‌سازد و صرفا به این اعتبار که خوش ساخت هستند، معنی‌دار ارزیابی می‌کند. در منطق سینوی اما حروف ربط پایه «یا» و «اگر ... آنگاه» و بالتبع جملات مرکب فصلی و شرطی به دو نوع اتفاقی و عنادی/ لزومی تقسیم می‌شوند و با توجه به اینکه ملاک معنی‌داری جملات مرکب از شروط صدق آن‌ها متمایز است، هر دو نوع اتفاقی و عنادی/ لزومی از جملات، معنی‌دار به شمار می‌آیند و برای آن‌ها شروط صدق جداگانه بیان می‌شود. این تفکیک اما اولا بدون ورود به معنی جمله امکان پذیر نیست، ثانیا مستلزم تخطی از اصل جداسازی صورت از معنا نیست. به علاوه، این منطق در ساخت جمله دخالت نمی‌کند و به بهانهٔ جداسازی صورت از معنی، نه جملات مصداقی نامفهوم را معنی دار تلقی می‌کند نه جملات مفهومی معنی دار را فاقد معنی به حساب می‌آورد.

۲- زبان منطق کلاسیک در منطق گزاره‌ها و محمول‌ها، هم شفافیت مصداقی دارد و هم شفافیت ارجاعی. شفافیت مصداقی اما از نظر مصداق جمله‌ها و محمول‌ها در منطق موجهات که مکمل منطق کلاسیک به شمار می‌آید، نقض می‌شود؛ یعنی زبان منطق موجهات از نظر مصداق جمله‌ها و محمول‌ها ناشفافیت مصداقی دارد که به این معنی است که

شفافیت مصداقی از اصول اجتناب ناپذیر منطق نیست و بنابراین معقولیت در زبان منطق منحصر در مصداقیت نیست. در منطق سینوی اما حرف ربط «یا» و بالتبع ساختار مرکب فصلی به دو نوع اتفاقی و عنادی و حرف ربط «اگر... آنگاه» و بالتبع ساختار مرکب شرطی به دو نوع اتفاقی و لزومی تقسیم می‌شود که با توجه به اینکه زبان گزاره‌های فصلی عنادی و شرطی لزومی، غیرمصداقی است به این معنی است که زبان این منطق در منطق گزاره‌ها همواره از شفافیت مصداقی برخوردار نیست. روشن است هر یک از دو نوع اتفاقی/ عنادی «یا» و دو نوع اتفاقی/ لزومی «اگر... آنگاه»، با این فرض که رفتار متفاوتی با هم داشته باشند و قابل تحویل به هم نباشند، نباید به صورت واحدی صورت‌بندی شوند و با توجه به اینکه جملات فصلی عنادی و شرطی لزومی، غیرتابع‌ارزشی و زبان آن‌ها غیرمصداقی (مفهومی) است، زبان منطق سینوی، همیشه از شفافیت مصداقی برخوردار نیست و انحصار معقولیت در مصداقیت در این منطق از اساس و بنیاد پذیرفتنی نیست. به علاوه منطق سینوی با تقسیم حروف ربط پایه به دو نوع تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی از اصل جداسازی صورت از معنا تخطی نکرده است. روشن است اگر این تفکیک، گزاره‌های سوردار را نیز به دو نوع تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی تقسیم کند، ناشفافیت زبان منطق سینوی در منطق محمول‌ها نیز اتفاق می‌افتد.

۳- منطق کلاسیک به خوبی از عهدهٔ شناسایی حروف ربط تابع ارزشی و قاعده‌های استنتاج و دلالت حاکی از رفتار نحوی و معنایی این حروف برآمده است. منطق سینوی اما تنها از حروف تابع ارزشی «یا» و «اگر ... آنگاه» بحث کرده است و در شناسایی شروط صدق حرف ربط تابع ارزشی «اگر ... آنگاه» توفیق کافی نیافته است.

۳- اصول امتناع اجتماع نقیضین (اصل امتناع تناقض) و امتناع ارتفاع نقیضین (اصل طرد شق ثالث) در منطق کلاسیک اثبات می‌شوند و بر آن‌ها برهان اقامه می‌شود. در منطق قدیم اما این اصول بدیهی به شمار می‌آیند و نه تنها هیچ برهانی بر اثبات آن‌ها اقامه نمی‌شود بلکه از اقامهٔ هر گونه برهان بر آن‌ها نهی می‌شود و براهین اثبات‌آن‌ها ناپذیرفتنی است ونادرستارزیابی می‌شود.

۴- در منطق کلاسیک، حصول نتیجه به کمک قاعده‌های استنتاج شرط لازم و کافی برای اثبات درستی استدلال است. این شرط اما در منطق قدیم برای اثبات درستی استدلال، شرط لازم اما ناکافی است. **برای** اثبات اعتبار استدلال نیز نداشتن سطر نمونه خلاف شرط لازم و کافی برای در منطق کلاسیک است. در منطق قذیم اما این شرط لازم اما ناکافی است.

۵- قاعده‌های استنتاج در این دو نظام تفاوت آشکار دارند و شباهت ظاهری آن‌ها نباید موجب شود تا آن‌ها را بر هم منطبق بدانیم. برای نمونه قاعدهٔ برهان خلف در نظام کلاسیک از اساس و پایه از قاعدهٔ برهان خلف در منطق قدیم متفاوت است.

۶- در منطق رابطهٔ استنتاج از نوعی رابطهٔ ضروری بین مقدمات و نتیجه حکایت می‌کند که فراتر از مفهوم استلزام مادی است. در منطق کلاسیک، این رابطه با توسل به استلزام مادی صورت بندی و توضیح داده می‌شود. در منطق

سینوی اما به این دلیل که ماهیتی متمایز از استلزام مادی دارد با این شرطی قابل صورت‌بندی و تفسیر نیت. مزید بر اینکه شرطی لزومی قابل صورت‌بندی است.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

اندازه در نظریه مدل‌ها

کریم خانکی
دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران
khanaki@arakut.ac.ir
khanaki@ipm.ir

چکیده: اندازه‌های کیسلر، به عنوان تعمیم طبیعی، مورد مطالعه قرار می‌گیرد و بهبودی از یک دستاور مهم از پیلی-هروشوفسکی-سیمون درباره اندازه‌های تعریف‌پذیر و "اندازه‌های به‌طور ژنریک پایدار" در تئوری‌های دلخواه ارائه می‌گردد. فراتر از آن، توصیف جدیدی از این مفاهیم ارائه می دهیم که مهم و روشنگر هستند.

کلید واژه‌ها: اندازه کیسلر، پایداری ژنریک، اندازه تعریف‌پذیر، دنباله مورلی

Introduction

Keisler measure are natural generalizations of types and have had important applications in model theory in recent years. In [HPP08], [HP11] and [HPS13], this notion has been widely studied in stable and NIP theories and important results and applications have been obtained. According to these results, the basic question is whether it is possible to prove similar results for arbitrary theories. The present paper aims to investigate 'generic stability' for measures in arbitrary theories. For this, we first generalize/adapt some results of [Kha22] on generically stable types to continuous logic, and then we transfer these results to measures in classical logic using randomization. We define the notion of R-generic stability, as a property of measures in classical logic, and show that a measure has this property if and only if a canonical randomtype behaves like generically stable types in the sense of continuous logic. We will see that, in countable languages, every R-generically stable measure is a f am measure. On the other hand, we show that every f im measure is R-generically stable, and assuming a local variant of NIP, a global measure is f im if and only if its corresponding random-type is generically stable (over a model of the form $M \otimes A$).1 Finally, we refine some of the previous results/observations. In particular, we prove that a measure is R-generically stable iff its corresponding random-type is generically stable (over a model of the form $M \otimes A$).

Let us give our motivation and background. First, we believe that model theory has a deep analytical nature that is not yet fully studied. In [KP18], [Kha20], [Kha19b], [Kha21a], [Kha21] and [Kha22], some analytical aspects of model theory/classification theory were studied. Roughly, it is shown that some model-theoretic notions appeared independently in topology/functional analysis/descriptive set theory, and moreover various characterizations yield the characterization of NOP/NIP/NSOP in a model M or set A, and some important theorems in model theory have twins there. Also, there are connections between classification in model theory and classification of Baire class 1 functions which lead to a better understanding of both of these topics [Kha19b]. The key idea is that the study of the model-theoretic properties of formulas in 'models' instead of only these properties in 'theories' develops a sharper stability theory and establishes important links between model theory and other areas of mathematics. In the present paper, we continue this approach and complete/generalize some results of [Kha21] and [Kha22]. This article contains a report of the results of [Kha22a]. The notions and definitions are fully stated, although some proofs are referred to the original article. This paper is organized as follows. In Section 2, we generalize/adapt some results of [Kha22] on generically stable types to continuous logic. We give characterizations of generic stability of continuous types in the terms of convergence of (Morley) sequences of types. In Section 3, we introduce the notion R-generic stability for measures in classical logic. We show that a measure (in classical logic) is R-generically stable if and only if there is a canonical random-type which behaves like generically stable types (in the sense of continuous logic).

Continuous logic and generic stability

In this section we introduce the notion of generic stability for types in *continuous logic* and give characterizations of this notion which will be used later. The proofs are adaptations of the arguments in classical logic [Kha22].[2]

Therefore, we introduce the notions in details but we will refer the proofs to the classical case and explain why arguments in classical case work here as well. We assume familiarity with the basic notions about continuous model theory as developed in [BBHU08].

In this section, we fix a **continuous** first order language L,[3] a complete countable (**continuous**) L-theory T (not necessarily NIP), and a small set A of the monster model $\mathbb{U}$. The space of global types in the variable x is denoted by $S_x(\mathbb{U})$ or $S(\mathbb{U})$.

In the following, $\phi(\bar{x})$ is a formula, r, s are real numbers in $[0,1]$, and $\phi(\bar{x}) \leq r$, $\phi(\bar{x}) \geq r$, and $\phi(\bar{x}) = r$ are L-statements (or L-conditions) in continuous logic.

Recall that, in continuous logic, we use $\sup, \inf, \min, \max, \leq$ instead of $\forall, \exists, \wedge, \vee, \dot{-}$, respectively. However, we will sometimes continue to use classic symbols to make our article more readable.

Definition 2.1. *Let $A \subset \mathbb{U}$ and $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L(A)$. We say that $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ is* symmetric *if for any permutation σ of $\{1, \ldots, n\}$,*

$$\sup_{\bar{x}} \left|\phi(x_1, \ldots, x_n) - \phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\right| = 0.$$

The following is an adaptation/generalization of [Kha22, Def. 2.3].

Definition 2.2. *(i) Let (b_i) be a sequence of $\mathbb{U}$ and $A \subset \mathbb{U}$ a set. The eventual Ehrenfeucht-Mostovski type (abbreviated EEM-type) of (b_i) over A,*

[2] This section can't be read without firm grasp of [Kha22].

[3] As mentioned earlier, in this paper, the language is countable, however we can consider *separable* languages. Also, we can study separable fragments of the language. To make the proofs more readable, we assume that the theory is countable.

which is denoted by $EEM((b_i)/A)$, is the following (partial) type in $S_\omega(A)$:

$$\big(\phi(x_1,\dots,x_k)=r\big)\in EEM((b_i)/A) \iff \lim_{i_1<\dots<i_k,\ i_1\to\infty}\phi(b_{i_1},\dots,b_{i_k})=r.$$

(ii) Let (b_i) be a sequence of $\mathbb{U}$ and $A\subset\mathbb{U}$ a set. The symmetric eventual Ehrenfeucht-Mostovski type (abbreviated SEEM-type) of (b_i) over A, which is denoted by $SEEM((b_i)/A)$, is the following partial type in $S_\omega(A)$:

$$\Big\{\phi(x_1,\dots,x_k)=r : \big(\phi(\bar x)=r\big)\in EEM((b_i)/A) \text{ and } \phi \text{ is symmetric}\Big\}.$$

Whenever (b_i) is A-indiscernible, we sometimes write $SEM((b_i)/A)$ instead of $SEEM((b_i)/A)$.
(iii) Let $p(x)$ be a type in $S_\omega(A)$ (or $S_\omega(\mathcal{U})$). The symmetric type of p, denoted by $Sym(p)$, is the following partial type:

$$\Big\{\big(\phi(x)=r\big)\in p : \phi \text{ is symmetric}\Big\}.$$

The sequence (b_i) is called *eventual indiscernible over A* if $EEM((b_i)/A)$ is a *complete* type. In this case, for any $L(A)$-formula $\phi(x)$, the limit $\lim_{i\to\infty}\phi(b_i)$ is well-defined.

Let $p(x)$ be a global A-invariant type. The Morley type (or sequence) of $p(x)$ can be easily defined similar to classical logic.[4] The Morley type (or sequence) of $p(x)$ is denoted by $p^{(\omega)}$. The restriction of $p(x)$ to A is denoted by $p|_A$. A realisation $(d_i : i<\omega)$ of $p^{(\omega)}|_A$ is called a Morley sequence of/in p over A.

Lemma 2.3. *Let $p(x)\in S(\mathbb{U})$ be finitely satisfiable in M where M is separable model.[5] Then there is a sequence (c_i) in M such that $SEEM((c_i)/M)=Sym(p^{(\omega)}|_M)$.*

We say that a sequence $(d_i)\in\mathbb{U}$ of x-tuples converges (or is convergent) if the sequence $(tp(d_i/\mathbb{U}):i<\omega)$ converges in the logic topology. Equivalently, for any $L(\mathbb{U})$-formula $\phi(x)$, the sequence $(\phi(d_i):i<\omega)$ is convergent, i.e. for any $\epsilon>0$ there is an natural number n such that $|\phi(d_i)-\phi(d_j)|<\epsilon$ for all $i,j\geq n$. If $(tp(d_i/\mathbb{U}):i<\omega)$ converges to a type p, then we write $\lim tp(d_i/\mathbb{U})=p$ or $tp(d_i/\mathbb{U})\to p$. Notice that $tp(d_i/\mathbb{U})\to p$ iff for any $L(\mathbb{U})$-formula $\phi(x)$,

$$\big(\phi(x)=r\big)\in p \iff \lim\phi(d_i)=r.$$

[4] Cf. [S15], subsection 2.2.1 for definition in classical case.
[5] We can assume that M is a separable set in some model.

Theorem 2.4. *Let T be a separable continuous theory, M a separable model, and $p(x) \in S(\mathbb{U})$ a global type which is finitely satisfiable in M. Let (d_i) be a Morley sequence of p over M. If (d_i) converges then there is a sequence (c_i) in M such that $tp(c_i/\mathbb{U}) \to p$.*

Proof. The proof is an adaptation of the argument of Theorem 2.8 of [Kha22]. □

The following is the counterpart of Definition 3.1 to continuous logic.

Definition 2.5. Let M be a model and $(p_n(x) : n < \omega)$ be a sequence of types over M. We say that $(p_n : n < \omega)$ *Baire-1/2-converges* (or *is Baire-1/2-convergent*) if the independence property is semi-uniformly blocked on $(p_n : n < \omega)$, that is, for any formula $\phi(x, y)$, and for each $r < s$, there is a natural number $N = N^{\phi}_{r,s}$ and a set $E \subset \{1, \ldots, N\}$ such that for each $i_1 < \cdots < i_N < \omega$, and any parameter $b \in M$, the following does not hold

$$\bigwedge_{j\in E} (\phi(x, b) \leq r) \in p_{i_j} \ \wedge \bigwedge_{j\in N\setminus E} (\phi(x, b) \geq s) \in p_{i_j}.$$

In the above, we can assume that M is the monster model.

Remark 2.6. *Notice that in Theorem 2.4, the sequence $(tp(c_i/\mathbb{U}) : i < \omega)$ is Baire-1/2-convergent. In fact, as $SEEM((c_i)/M) = Sym(p^{(\omega)}|_M)$, any/some Morley sequence is convergent if and only if $(tp(c_i/\mathbb{U}) : i < \omega)$ is Baire-1/2-convergent. In particular, if the Morley sequence of p is totally indiscernible (e.g. p is generically stable),*

$$EEM((c_i)/M) = SEEM((c_i)/M) = Sym(p^{(\omega)}|_M) = p^{(\omega)}|_M.$$

This means that Morley sequences of p are controlled by the sequence $(c_i) \in M$, and vice versa. We will shortly see that this fact leads to a new and useful characterization of the following notion, namely generic stability.

The following is the natural/correct adaptation of generic stability from [PT11] to continuous logic (cf. Remark 2.8(v) below).

Definition 2.7 (Generic stability)**.** *Let T be a continuous theory and A a small set of the monster model. A global type $p(x)$ is* generically stable *over A if p is A-invariant and* **any** *Morley sequence $(a_i : i < \omega)$ of p over A is totally indiscernible AND it has no order; that is, there is no a sequence $(b_i : i < \omega)$, a formula $\phi(x, y)$, and $r < s$ such that $\phi(a_i, b_j) \leq r$ if $i < j$ and $\phi(a_i, b_j) \geq s$ in otherwise.*

Remark 2.8. *Let $p(x)$ be a global A-invariant type. The following are equivalent.*
(i) p is generically stable over A.
(ii) p is A-invariant and for **any** *Morley sequence $(a_i : i < \omega)$ of p over A, we have $\lim tp(a_i/\mathbb{U}) = p$.*
(iii) The condition (ii) holds and furthermore, the sequences $(tp(a_i/\mathbb{U}) : i < \omega)$ are Baire-$1/2$-convergent.
(iv) Any Morley sequence of p is totally indiscernible AND convergent.
(v) For **any** *Morley sequence $(a_i : i < \alpha)$ (any α, not only ω) of p over A, and any formula $\phi(x)$ (with parameters from $\mathbb{U}$) and $r < s$, at least one of $\{i : \models \phi(a_i) \leq r\}$ or $\{i : \models \phi(a_i) \geq s\}$ is finite.*

The following theorem gives a characterizations of generically stable types for countable theories. The important one to note immediately is (ii).

Theorem 2.9. *Let T be a continuous theory, M a small model of T, and $p(x) \in S(\mathbb{U})$ a global M-invariant type. The following are equivalent:*
(i) p is generically stable over M.
(ii) p is definable over a small model, AND there is a sequence (c_i) in M such that $(tp(c_i/\mathbb{U}) : i < \omega)$ Baire-$1/2$-converges to p.
(iii) p is definable over and finitely satisfiable in some small model, AND there is a convergent Morley sequence of p over M.

Proof. The proof is an adaptation of the argument of Theorem 4.4 of [Kha22].

Measures and random types

In this section we first introduce the notion of R-generic stability, as a property of a measure in classical logic, and then using the results of Section 2 we study this notion and related random-types (in the sense of continuous logic) and their connections. We study two variants of random-types related to a measure, namely the natural extension (Section 3.2) and the corresponding random-type (Section 3.3). We study their relationship with f am and f im measures.

R-generic stability

In this section we introduce the notion of *R-generically stable measure* in **classical** logic, and show that this notion and its corresponding notion in NIP theories [HPS13] coincide. We show that every R-generically stable measure is a fam measure.

In this section, we fix a (classical) first-order language L, a complete countable L-theory T (not necessarily NIP), and a small set A of the monster model $\mathcal{U}$. The space of global types in the variable x is denoted by $S_x(\mathcal{U})$ or $S(\mathcal{U})$.

We first give a notion/notation. Let $\mu(x)$ be a global measure, $r_1, \ldots, r_k \in [0,1]$ such that $\sum r_i = 1$. The measure $\mu^{\sum r_i}$ is defined as follows: for any formula $\phi(x,y)$, and any parameters $b_1, \ldots, b_k$,

$$\mu^{\sum r_i}(\phi; (b_i)_1^k) := \sum_1^k r_i \cdot \mu(\phi(x, b_i)).$$

The following notion is technical but we will shortly see that it is the natural generalization of the corresponding notion in the case of type.

Definition 3.1. Let $(\mu_n(x) : n < \omega)$ be a sequence of global A-invariant measures. We say that $(\mu_n : n < \omega)$ *is randomly convergent* (or *randomly converges*) if for any formula $\phi(x,y)$ and for each $r < s$, there are a natural number $N = N^{\phi}_{r,s}$ and a set $E \subset \{1, \ldots, N\}$ such that for any $r_1, \ldots, r_k \in [0,1]$ with $\sum r_t = 1$ and any parameters $b_1, \ldots, b_k$ and for each $i_1 < \cdots < i_N < \omega$, the following does not hold

$$\bigwedge_{j \in E} \mu_{i_j}^{\sum r_t}(\phi; (b_t)_1^k) \leq r \ \wedge \bigwedge_{j \in N \setminus E} \mu_{i_j}^{\sum r_t}(\phi; (b_t)_1^k) \geq s. \quad (*)$$

Remark 3.2. *(i): In the above definition, if* $(*)$ *holds just for* $k = 1$*, then we say that* $(\mu_n : n < \omega)$ is Baire-1/2-convergent *(or* Baire-1/2 converges*). (Campare Definition 2.5 above.) A question arise. Is every Baire-1/2-convergent sequence randomly convergent?*
(ii): It is easy to verify that: $(\mu_n : n < \omega)$ *randomly converges if and only for any formula* $\phi(x,y)$ *and for each* $r < s$*, there are a natural number* $N = N^{\phi}_{r,s}$ *and a set* $E \subset \{1, \ldots, N\}$ *such that for any* $r_1, \ldots, r_k \in [0,1]$ *with* $\sum r_t = 1$ *the sequence* $(\mu_n^{\sum_1^k r_t} : n < \omega)$ *Baire-1/2 converges (with respect to* N, E *fixed above). This is important in the proof of Theorem 3.11 below.*

Definition 3.3. *(i) Let $\mu(x)$ be a global measure. We say that μ is R-*generically stable *over A if μ is definable over A, AND there is a sequence $(\mu_n : n < \omega)$ of measures such that:*
- *$\mu_n = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} p_{n,i}$ where $a_{n,i} \models p_{n,i}$ and $a_{n,i} \in A$ (for all n), and*
- *$(\mu_n : n < \omega)$ randomly converges to μ.*

*(ii) Let $p(x)$ be a global type. We say that p is R^{type}-*generically stable *over A if p is definable over A, AND there is a sequence $(p_n : n < \omega)$ of types such that:*
- *$a_n \models p_n$ and $a_n \in A$ (for all n), and*
- *$(p_n : n < \omega)$ randomly converges to p.*

Remark 3.4. *(1): Notice that for a type p, the conditions in (ii) implies the conditions in (i), but there is no reason for the converse to be true.*
*(2): On the other hand, we can make a more subtle distinction. Indeed, for any finite set F of real numbers in $[0, 1]$, we can give a generalization of Definition 3.3(ii) as follows. Let $\mu(x)$ be a global F-valued measure. We say that μ is R^F-*generically stable *over A if p is definable over A, AND there is a sequence $(\mu_n : n < \omega)$ of F-valued measures such that:*
- *μ_n is a F-valued measures of a convex combination of types realized in A (for all n), and*
- *$(\mu_n : n < \omega)$ randomly converges to μ.*

Although we will not study it in this article, we believe that for a fixed F, the latter notion and the usual notion of generically stable type are of the same nature and complexity.

First we show that, for types, R^{type}-generic stability and the usual notion of generic stability coincide. The following is a new characterization of generic stability which is interesting in itself.

Fact 3.5. *Let $p(x)$ be a global A -invariant type. The following are equivalent:*
(i) p is generically stable over A (as in [PT11]).
(ii) p is R^{type}-generically stable over A (as in Definition 3.3).

Recall that the notion of generically stable measures for NIP theories was introduced and studied in [HPS13]. The next observation show that the new and usual notions coincide, in NIP theories.

Proposition 3.6. *(Assuming T is NIP.) Let μ be a global measure. Then μ is R-generically stable over A (as in Definition 3.3(i)) iff it is generically stable over A (as in [HPS13]).*

Proof. Recall that, in NIP theories, any definable and finitely satisfiable measure is generically stable. Therefore, this follows from the definition. (In particular, for types, R-generic stability and R^{type}-generic stability are the same.) □

We need to recall from [G21, Definition 3.1] the notion of sequential approximation of measures. Let $\mu(x)$ be a global measure. We say that μ is *sequentially approximated over* A if there is a sequence $(\mu_n : n < \omega)$ of measures such that:
- $\mu_n = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} p_i$ where $a_i \models p_i$ and $a_i \in A$ (for all n), and
- $(\mu_n : n < \omega)$ converges to μ.

Notice that convergence is in the logic topology or equivalently the topology of pointwise convergence. (Cf. [G21], Definition 2.1.)

Proposition 3.7. *Let $\mu(x)$ be a global measure. If μ is R-generically stable over A, then μ is fam over A.*

Proof. This follows from Proposition 3.4 of [G21]. First notice that, as T is countable and μ is definable, we can assume that A is countable. Clearly, by definition, μ is sequentially approximated over A. As μ is definable and sequentially approximated, Proposition 3.4 of [G21] implies that μ is fam.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

Random types and R-generic stability

Randomization of a first-order structure M, as formalized by Ben Yaaocv and Keisler [BK09], is a new *continuous* structure whose elements are random elements of M. In this section we show that a measure μ (in classical logic) is R-generically stable (as in Definition 3.3) if and only if a canonical random-type (i.e. the natural extension) **behaves like** generically stable types in continuous logic (as in Theorem 2.9). Although, in Section 4, we show that R-generic stability is equivalent to a perfect analog of generic stability in the sense of continuous logic.

We assume familiarity with the basic notions about randomization of classical structures/theories as developed in [BK09] and [Ben14]. Although we recall some notion and results from [Ben14]. In the following T is a classical theory and T^R its randomization, as a continuous theory.

Convention 3.8. *In this section, the symbol $\otimes$ is not used for the Morley product of types/measures, but will be used in another sense.*

Convention 3.9. *In the rest of the article, whenever necessary, we write the parameters in* **continuous** *logic (i.e. in $\mathbb{U}$) in bold letters $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\dots$. Otherwise, we use $a, b, c, \dots$.*

Let M be a classical L-structure and $\mathcal{A}$ an atomless measure algebra. The L^R-pre-structure $(M \otimes \mathcal{A})_0$ is defined as follows. The domain consists of all formal finite sums $\sum_{i<k} m_i \otimes e_i$, also written $\bar{m}\bar{e}$, where $m \in M$ and $\bar{e} = (e_i)_{i<k} \subseteq \mathcal{A}$ is a partition of the identity. If e' is any other event then one can easily refine the partition and we identify members of $(M \otimes \mathcal{A})_0$ with other members obtained by refinement of partition. In this case, it is easy to check that:

$$f(\bar{a} \otimes \bar{e}, \bar{b} \otimes \bar{e}, \dots) = (f(a_i, b_i, \dots)) \otimes \bar{e},$$

$$[\![P(\bar{a} \otimes \bar{e}, \bar{b} \otimes \bar{e}, \dots)]\!] = \bigvee\{e_i : P(a_i, b_i, \dots)\} \in \mathcal{A}.$$

As the distance symbol interprets a metric on $(M \otimes \mathcal{A})_0$, its completion is denoted by $M \otimes \mathcal{A}$. Notice that if $M \models T$ then $M \otimes \mathcal{A} \models T^R$.

Let $\mu(\bar{x})$ be a measure over M. Then, it is a random type over M, but not over $M \otimes \mathcal{A}$. Although there is a natural extension $\mu \otimes \mathcal{A}$ of μ over $M \otimes \mathcal{A}$. For every L-formula ϕ we define

$$\mathbb{P}\Big[\phi\Big(\bar{x}, \sum m_i e_i\Big)\Big]^{\mu \otimes \mathcal{A}} = \sum \mathbb{P}[e_i]\mathbb{P}^{\mu}[\phi(\bar{x}, m_i)].$$

As this is only defined for formulae over the parameter set $(M \otimes \mathcal{A})_0$, it can be extended by continuity to the whole structure. The type $\mu \otimes \mathcal{A}$ is called the *natural extension of* μ.

Fact 3.10 ([Ben14], Proposition 1.1). *Let $\mathcal{U}$ be the monster model of T, μ a global measure, and $\mathcal{A}$ an atomless measure algebra. Suppose that M is a separable model of T and $\mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}$ is separable.*
(i) $M \otimes \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{U} \otimes \mathcal{A}$.
(ii) μ is definable over M if and only if the type $\mu \otimes \mathcal{A}$ is definable over M.
(iii) μ is finitely satisfied in M if and only if the type $\mu \otimes \mathcal{A}$ is finitely satisfied in $M \otimes \mathcal{A}_0$.

We are now ready to give the main result/observation of this subsection.

Theorem 3.11. *Let T be a (countable) classical theory, M a small model of T, and $\mu(x)$ a global M-invariant measure. Let $\mathcal{A}$ be an atomless measure algebra such that $[0,1] \preceq \mathcal{A}$. The following are equivalent:*

(i) μ is R-generically stable over M (as in Definition 3.3).
(ii) There is a sequence $(\mathbf{a}_n) \in M \otimes [0,1]$ such that $(tp(\mathbf{a}_n/\mathcal{U} \otimes \mathcal{A}) : n < \omega)$ Baire-1/2-converges to $\mu \otimes \mathcal{A}$.

Proof. See Theorem 3.12 in [Kha22a] □

Remark 3.12. *(i) One can NOT expect that a combination of Theorem 3.11 and Theorem 2.9 implies that a measure μ (in classical logic) is R-generically stable if and only if "its randomization" is generically stable (in continuous logic). The reasons are that: (1) There is no guarantee that $\mathcal{U} \otimes \mathcal{A}$ is the monster model of T^R, and $\mu \otimes \mathcal{A}$ is not the first candidate for randomization of μ, unlike $\mu \restriction^{\mathbb{U}}$ defined in Subsection 3.3 below. (See the following example on (non-)saturation of models of the form $M \otimes \mathcal{A}$.) (2) The randomization $\mu \restriction^{\mathbb{U}}$ of μ, as defined below, is an extension of $\mu \otimes \mathcal{A}$, AND there is no reason that $\mu \restriction^{\mathbb{U}}$ will be finitely satisfible assuming that $\mu \otimes \mathcal{A}$ is finitely satisfible. This is the reason why in Proposition 2.1 of [Ben14] the author made another assumption (i.e. NIP) . Although in the following we prove, with a weaker assumption than NIP, that a measure μ is fim if and only if $\mu \restriction^{\mathbb{U}}$ is generically stable over a model of the form $M \otimes \mathcal{A}$.*

(ii) (Example) James Hanson pointed out to us that randomizations of the form $M \otimes \mathcal{A}$ are not sufficiently saturated in general.[6] *For an easy example, let T be DLO with constants added for $\mathbb{Q}$. Consider the Lebesgue measure on $[0,1]$ and let p be the corresponding type in T^R. No model of T^R of the form $M \otimes \mathcal{A}$ can realize p, because for any element $\mathbf{a}$ of such a model, $tp(\mathbf{a})$ corresponds to a measure in T with atoms. (And this is in the completion, not just the pre-model. Any type corresponding to a measure with finite support has distance 1 from p in T^R's type space.) He also suggested a characterization of a theory T such that models of T^R of the form $M \otimes \mathcal{A}$ can be arbitrarily saturated: a proper subclasses of stable theories.*

(iv) It is known by Conant, Gannon and Hanson (in an unavailable paper) that there are definable and finitely satisfiable measures which their randomizations are not finitely satisfiable. Although, Using the dominated convergence theorem, it is easy to see that randomizations of fam (and so R-generically stable) measures are finitely satisfiable in models of the form $M \otimes \mathcal{A}$. The converse is problematic for generically stable types in continuous logic, because we do NOT know whether if randomization of μ is finitely satisfiable (in a model not necessarily of the form $M \otimes \mathcal{A}$) then μ will be finitely satisfiable or not. One of the reasons that we think the notion of R-generic stability is suitable for our purpose is that this problem does not appear here.

[6] Although, probably simultaneously (and of course independently) we and Hanson realized that $\mathcal{U} \otimes \mathcal{A}$ could not be the monster model, it was Hanson who made this clear.

Acknowledgements. I would like to thank the Institute for Basic Sciences (IPM), Tehran, Iran. Research partially supported by IPM grant 1401030117.

References

[Ben13] I. Ben-Yaacov, On theories of random variables, Israel J. Math. 194 (2013), no. 2, 957-1012

[Ben14] I. Ben-Yaacov, Transfer of properties between measures and random types, unpublished note, 2008. http://math.univ-lyon1.fr/ begnac/articles/MsrPrps.pdf

[BBHU08] I. Ben-Yaacov, A. Berenstein, C. W. Henson, A. Usvyatsov, *Model theory for metric structures*, Model theory with Applications to Algebra and Analysis, vol. 2 (Z. Chatzidakis, D. Macpherson, A. Pillay, and A. Wilkie, eds.), London Math Society Lecture Note Series, vol. 350, Cambridge University Press, 2008.

[BK09] I. Ben Yaacov, and H.J. Keisler, Randomizations of models as metric structures. Confluentes Mathematici, 1:197–223 (2009).

[CG20] G. Conant, K. Gannon, Remarks on generic stability in independent theories, Ann. Pure Appl. Logic 171 (2020), no. 2, 102736, 20. MR 4033642

[CGH21] G. Conant, K. Gannon, J. Hanson, Keisler measures in the wild, arxiv 2021

[G21] K. Gannon, Sequential approximations for types and Keisler measures, preprint: 2021 https://arxiv.org/abs/2103.09946v2

[G52] A. Grothendieck, Criteres de Compacite dans les Espaces Fonctionnels Generaux, Am. J. Math, 74 (1952), 168-186.

[HPP08] E. Hrushovski, Y. Peterzil, and A. Pillay, Groups, measures, and the NIP, Journal of the American Mathematical Society, vol. 21 (2008), no. 2, pp. 563–596.

[HP11] E. Hrushovski, A. Pillay, On NIP and invariant measures, Journal of the European Mathematical Society, 13 (2011), 1005-1061.

[HPS13] E. Hrushovski, A. Pillay, and P. Simon. Generically stable and smooth measures in NIP theories. Transactions of the American Mathematical Society 365.5 (2013): 2341-2366.

[Kei99] H. Jerome Keisler. Randomizing a Model. Advances in Math 143 (1999), 124-158.

[Kha21] K. Khanaki, Dependent measures in independent theories, submitted, arXiv:2109.11973, 2021.

[Kha19b] K. Khanaki, Dividing lines in unstable theories and subclasses of Baire 1 functions, Archive for Mathematical Logic (2022), https://doi.org/10.1007/s00153-022-00816-8

[Kha22a] K. Khanaki, Generic stability and modes of convergence, submitted, https://arxiv.org/abs/2204.03910, 2022.

[Kha21a] K. Khanaki, Glivenko-Cantelli classes and NIP formulas, submitted, arXiv:2103.10788v4, 2021.

[Kha22] K. Khanaki, Remarks on convergence of Morley sequences, arXiv:1703.08731, 2017.

[Kha20a] K. Khanaki, On classification of continuous first order theories, submitted, 2020.

[Kha20] K. Khanaki, Stability, the NIP, and the NSOP; Model Theoretic Properties of Formulas via Topological Properties of Function Spaces, Math. Log. Quart. 66, No. 2, 136-149 (2020) / DOI 10.1002/malq.201500059

[KP18] K. Khanaki, A. Pillay, Remarks on NIP in a model, Math. Log. Quart. 64, No. 6, 429-434 (2018) / DOI 10.1002/malq.201700070

[PT11] A. Pillay and P. Tanović, Generic stability, regularity, and quasiminimality, Models, logics, and higher-dimensional categories, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 189–211. MR 2867971

[Ros74] H. P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l^1, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411-2413.

[S15] P. Simon. A guide to NIP theories. Cambridge University Press, 2015.

[van98] Lou van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 248, Cambridge University Press, Cambridge, 1998

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

نظریه‌های صدق عرفی بدون قاعده انقباض

سیاوش احمدزاده، لطف الله نبوی
دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
seiavash.ahmadzadeh@gmail.com
nabavi_l@modares.ac.ir

چکیده: از قضیه‌ی تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی می‌دانیم اضافه کردن محمول صدق عرفی به نظریه‌هایی که حداقل شامل حساب باشند در چارچوب منطق کلاسیک موجب ناسازگاری می‌شود. طرفداران منطق‌های غیرکلاسیک از حفظ محمول صدق عرفی به عنوان یکی از انگیزه‌های اصلی ترجیح این منطق‌ها بر منطق کلاسیک نام می‌برند. در این مقاله به دو دسته‌ی اصلی از منطق‌های غیر کلاسیک بدون قاعده‌ی انقباض خواهیم پرداخت و نشان خواهیم داد در رسیدن به اهداف خود چقدر در برابر یکدیگر و منطق کلاسیک موفق هستند.

کلید واژه‌ها: منطق‌های بدون قاعده‌ی انقباض، پارادوکس کری، منطق‌های فراسازگار، منطق‌های فراتمام، محمول صدق عرفی

مقدمه

تارسکی هدف خود را ارائه‌ی تعریفی از محمول صدق می‌دانست که علاوه بر این که دارای صحت صورت باشد شرط کفایت مادی، انطباق تعریف صدق در نظریه‌های صوری با شهود روزمره‌ی ما درباره‌ی این محمول، را نیز برآورده کند. بر همین اساس دسته‌ای از منطقدانان باور دارند تعریف تارسکی از صدق در فرازبان و سلسله مراتبی کردن زبان دور شدن از ایده‌ی اولیه و اصیل تعریف صدق است و تصمیم می‌گیرند که محمول صدق عرفی را به عنوان امری شهودی‌تر و بدیهی‌تر از منطق کلاسیک حفظ کنند و در عوض منطق را برای جلوگیری از تریویال شدن نظریه عوض کنند.

در این مقاله تنها به مساله‌ی صدق در نظریه‌های صوری خواهیم پرداخت. منظور از محمول صدق عرفی، $T(x)$، محمولی تک موضعی است که برای هر جمله‌ی A در زبان خواهیم داشت $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$، $\ulcorner A \urcorner$ نامی برای جمله‌ی A است. جمله‌های پارادوکسیکال خاصی که از اضافه کردن محمول صدق عرفی به PA با استفاده از قضیه‌ی نقطه ثابت به

دست می‌آیند و مد نظر ما هستند عبارتند از $\lambda \leftrightarrow \neg T(\ulcorner\lambda\urcorner)$ و $C \leftrightarrow (T(\ulcorner C\urcorner) \rightarrow A)$ که به λ و C به ترتیب جمله‌های دروغگو و کری می‌گوییم.

منطق‌های مورد بحث در ادامه با از کار انداختن قاعده‌ی انقباض، سعی دارند از تریویال شدن نظریه جلوگیری کنند. این منطق‌ها به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند: منطق‌های فراسازگار و منطق‌های فراتمام. منطق‌های فراسازگار منطق‌هایی هستند که در آن‌ها از تناقض هر چیزی نتیجه گرفته نمی‌شود یا به عبارت دیگر فاقد EFQ هستند. منطق‌های فراتمام به منطق‌هایی گفته می‌شود که در آن‌ها اصل طرد شق ثالث برقرار نیست. در بخش ۲ نظریه‌های صدق عرفی فراسازگار و در بخش ۳ نظریه‌های صدق عرفی فراتمام را معرفی می‌کنیم و برخی نتایج بدست آمده در مورد عملکرد آن‌ها را ارائه خواهیم داد.

نظریه‌های صدق عرفی فراسازگار

منطق LP با جدول ارزش زیر شناخته می‌شود (Priest, 2002):

$\vee$	f	b	t
t	f	b	t
b	b	b	t
t	t	t	t

$\wedge$	f	b	t
f	f	f	f
b	f	b	b
t	f	b	t

$\neg$	
t	f
b	b
f	t

شرط نیز به شیوه‌ی معمول، شرطی مادی، تعریف می‌شود و ارزش صدق سورها نیز به همان شیوه‌ی مطنق کلاسیک تعیین می‌شود تنها با این تفاوت که ارزش برگزیده هم t است هم b در LP. تعریف‌های زیر را درباره‌ی استنتاج معنایی داریم:

$$\vDash_{LP} \varphi \; iff \; I(\varphi) = t \;\; or \; b \;\; for \; all \; I$$

$$\Delta \vDash_{LP} \varphi \; iff \; I(\theta) = t \; or \; b \; for \; all \; \theta \in \Delta \; then \; I(\varphi) = t \; or \; b$$

در نگاه اول منطق LP بسیار مطلوب به نظر می‌رسد زیرا می‌توان نشان داد قضیه‌های آن با منطق کلاسیک اینهمان است و در عین حال اضافه کردن جمله‌های پارادوکسیکال موجب تریویال شدن آن نمی‌شوند.

با ین حال منطق LP چندان مناسبی به نظر نمی‌رسد زیرا از این که تمامی قضیه‌های منطق کلاسیک در LP نیز نتیجه می‌شوند نمی‌توان نتیجه گرفت که قدرت استنتاجی آن نیز به اندازه‌ی سیستم کلاسیک است. نداشتن قاعده‌ی وضع مقدم در مورد ادات شرطی LP باعث می‌شود اگر اصل‌های PA یا اصل‌های مربوط به صدق را به نظریه برهان آن اضافه کنیم نتوانیم از آن‌ها قضیه‌های بسیار ساده‌ی حساب و سمانتیک را نیز به دست آوریم. پریست قصد

دارد که سیستم فراسازگار قوی‌تری که بتوان در آن نوعی شرطی داشت که قاعده‌ی وضع مقدم در مورد آن برقرار باشد بسازد و در عین حال در برابر پارادوکس کری مصون باشد. سیستم پریست از منطق B، که از آن به عنوان پایه‌ی منطق‌های ربطی نام برده می‌شود، به اضافه‌ی اصل طرد شق ثالث (X) ساخته می‌شود.

منطق BX شامل اصول موضوعه و قاعده‌های زیر می‌شود: (Priest,2002) :

$A1)\ A \to A$

$A2)\ A \to A \vee B$

$A3)\ B \to A \vee B$

$A4)\ A \wedge B \to A$

$A5)\ A \wedge B \to B$

$A6)\ \neg\neg A \leftrightarrow A$

$A7)\ A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A8)\ (\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

$A9)\ (\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \vee B)$

$A10)\ (A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$

$A11)\ (A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

$A12)\ A \vee \neg A$

$A13)\ \forall x A \to A(\frac{t}{x})$

$A14)\ A(\frac{t}{x}) \to \exists x A t$

$A15)\ (A \wedge \exists x B) \to \exists x(A \wedge B)$

$A16)\ \forall x(A \vee B) \to (A \vee \forall x B)$

$A17)\ \forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B)$

$A18)\ \forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$

$R1)\ \dfrac{A, B}{A \wedge B}$

$R2)\ \dfrac{A, A \to B}{A}$

$$R3)\ \frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$$

$$R4)\ \frac{A \to B \quad C \to D}{(B \to C) \to (A \to D)}$$

$$R5)\ \frac{A}{\forall x A}$$

BXT از اضافه کردن محمول صدق عرفی به BX ساخته می‌شود. همچنین اگر اصول PA را به BX اضافه کنیم نظریه‌ی حسابی $BX\#$ به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که $BXT\#$ غیرتریویال است.

اجازه دهید به زبان $BX\#$ ثابت t را با قواعد زیر به سیستم اصل موضوعی اضافه کنیم:

$t - definition$	$t \to A \dashv\vdash A$

اگر f را به صورت $\neg t$ تعریف کنیم خواهیم داشت: $PA \vdash A \Longrightarrow BX\# \vdash A \vee f$. این نتیجه هر چند برای عده‌ای خوشحال کننده است اما به اندازه‌ی پایستاری قوی نیست.

مشکل بسیار مهم دیگر این است که طرفداران نظریه‌های فراسازگار هنوز نتوانسته‌اند نشان دهند توابع و مجموعه‌های بازگشتی در آن‌ها نمایش‌پذیر هستند و بنابراین نمی‌توانند نشان دهند نظریه‌ی آن‌ها قادر به اثبات قضیه‌ی نقطه ثابت است[۱]. پس نمی‌توانند ادعا کنند که نظریه‌ی آن‌ها خود جمله‌های دروغگو و کری را اثبات می‌کند.

در صورتی که قواعد منطق T-نگهدار باشند، یعنی داشته باشیم $A \vdash B \Longrightarrow \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \to T(\ulcorner B \urcorner)$ می‌توان استدلال پارادوکسیکال کری را بازسازی کرد و نشان داد نظریه‌ی بدست آمده تریویال خواهد شد. پس منطقدان فراسازگار از یک سور مجبور خواهد بود از صدق نگهداری برای اثبات قضیه‌هایی همچون مدل داشتن نظریه در فرازبان استفاده کند و از سوی دیگر باید آن را در زبان رد کند که این خود به معنی داشتن صدق‌های متفاوت خواهد بود.

همچنین یکی از انتظارات بسیار مهم از هر نظریه‌ی صدق عرفی‌ای، از جمله $BXT\#$، این خواهد بود که اثبات کند هر چیزی که در نظریه اثبات‌پذیر است صادق نیز است، یعنی $BXT\# \vdash Bew_{BXT\#}(\ulcorner G \urcorner) \to T(\ulcorner G \urcorner)$، و این عدم نیاز به فرازبان یکی از انگیزه‌های اصلی برای دفاع از نظریه‌ی صدق عرفی است. اما با داشتن چنین قضیه‌ای در سیستم می‌توان اثبات کرد $BXT\# \vdash Prf_{BXT\#}(g, G) \wedge \neg Prf_{BXT\#}(g, G)$ که g کد گودلی اثبات G یا همان جمله گودلی نظریه است.

۱. نگاه کنید به (Restall,1994:208-211)

چنین تناقضی که به قسمت خالص حسابی نظریه نشت کرده است به این معنی خواهد بود که دنباله‌ای از فرمول‌ها هم اثباتی برای یک فرمول خواهد بود و هم نه، که چندان پذیرفتنی نیست.

نظریه‌های صدق عرفی فراتمام

اولین نظریه‌ی فراتمامی که بررسی می‌کنیم PKF است (Halbach & Horsten, 2006). این نظریه بر پایه‌ی منطق سه ارزشی کلینی قوی (SK) ساخته شده است. جدول ارزش این منطق کاملاً مشابه LP است با این تفاوت که تنها ارزش برگزیده در آن t است. این موجب می‌شود که SK قضیه نداشته باشد و برای آن تنها حساب رشته یا حساب استنتاج طبیعی داشته باشیم. اما اگر اصول حساب به آن اضافه شود می‌توان نشان داد نسبت به PA پایستار است، یعنی برای هر $A \in \mathcal{L}_{PA}$ خواهیم داشت $SK\# \vdash A \implies PA \vdash A$. هر چند در مدل‌های SKT همواره ارزش $T(\ulcorner A \urcorner)$ و A یکی خواهد بود اما نمی‌توان اثبات کرد $SKT \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$ و تنها خواهیم داشت $SKT \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow A$ که به معنی نداشتن محمول صدق عرفی خواهد بود.

هرتری فیلد (Field,2003) تلاش می‌کند شرطی مناسبی را به این منطق اضافه کند و در عین از پارادوکس کری مصون بماند. منطق LCC شامل اصول موضوعه و قواعد زیر است:

$FA1)\ A \rightarrow A$

$FA2)\ A \wedge B \rightarrow A$

$FA3)\ A \wedge B \rightarrow B$

$FA4)\ A \rightarrow A \vee B$

$FA5)\ B \rightarrow A \vee B$

$FA6)\ A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$FA7)\ \neg\neg A \rightarrow A$

$FA8)\ (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

$FA9)\ (A \rightarrow \neg A) \leftrightarrow \neg(T \rightarrow A)$

$FA10)\ \forall x A x \rightarrow A t$

$FA11)\ \forall x(A \vee B) \rightarrow A \vee \forall x B$

$FR1)\ A, B \vdash A \wedge B$

$FR2)\ A, A \rightarrow B \vdash B$

$FR3)\ A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

$FR4)\ A \vdash B \to A$

$FR5)\ A \to B \vdash (C \to A) \to (C \to B)$

$FR6)\ \neg[(C \to A) \to (C \to B)] \vdash \neg[A \to B]$

$FR7)\ (A \to B) \wedge (A \to C) \vdash A \to (B \wedge C)$

$FR8)\ (A \to C) \wedge (B \to C) \vdash (A \vee B) \to C$

$FR9)\ Ax \vdash \forall x Ax$

$FR10)\ \forall x(A \to B) \vdash \forall xA \to \forall xB$

$FR11)\ \forall x(\neg A \to A) \vdash \neg\forall xA \to \forall xA$

اصل اینهمانی

$A \vdash A$

قاعده‌ی تضعیف

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad and\ \Gamma \subseteq \Delta}{\Delta \vdash A}$$

قاعده‌ی برش ضعیف شده

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

فراقاعده‌ی حذف∨

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

نظریه‌ی صدق عرفی بدست آمده بر پایه‌ی این منطق سازگار است و در عین حال نسبت به PA پایستار است پس تمام توابع بازگشتی و از جمله تابع قطری‌سازی در $TLCC\#$ نمایش پذیر است و در نتیجه جمله‌های پارادوکسیکال دروغگو و کری در آن اثبات‌پذیر هستند. اما این نظریه نیز همچون $BXT\#$ T-نگهدار نخواهد بود و همچنین در صورت اثبات صحت خود دچار تناقض و تریویال شدن خواهد شد. با این اوصاف این منطق هر چند بهتر از منطق‌های فراسازگار عمل خواهد کرد اما در رسیدن به هدف اولیه تعریف صدق عرفی، یعنی یافتن زبان تخت و بی نیازی از فرازبان، ناکام خواهد ماند.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

نتیجه‌گیری

منطق‌های بدون قاعده‌ی انقباض پیشنهاد شده برای نظریه‌ی صدق عرفی هر چند می‌توانند شمای صدق نامقید را داشته باشند و تریویال نشوند اما از یک سو کماکان این نظریه‌ها به فرازبان نیاز خواهند داشت و از سوی دیگر از کار انداختن استدلال پارادوکسیکال باعث ضعف قدرت استنتاجی و برخی نتایج نامطلوب خواهد شد.

منابع

Field, Hartry (2003). A revenge-immune solution to the semantic paradoxes. *Journal of Philosophical Logic* 32 (2):139-177.

Halbach, Volker & Horsten, Leon (2006). Axiomatizing Kripke’s Theory of Truth. *Journal of Symbolic Logic* 71 (2):677 – 712

Priest, G. (2002). Paraconsistent Logic. In: Gabbay, D.M., Guenthner, F. (eds) Handbook of Philosophical Logic. Handbook of Philosophical Logic, vol 6. Springer, Dordrecht.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

منطق پیوسته مبتنی بر نرم مثلثی پیوسته

سید محمدامین خاتمی
گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران
khatami@birjandut.ac.ir

چکیده: در این مقاله نوعی پیوسته از ساختارها در منطقهای مبتنی بر t-نرم پیوسته مرتبه اول را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم تعابیر همه فرمول‌ها در این نوع از ساختارها توابعی پیوسته هستند. همچنین صورتی از قضیه واش را برای فراضرب آنها بیان می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: منطق پیوسته، منطق مبتنی بر t-نرم پیوسته، قضیه واش

مقدمه

منطق پیوسته برای اولین بار در دهه ۱۹۶۰ میلادی توسط چنگ و کیسلر معرفی شد [3]. در این منطق مجموعه مقادیر درستی می‌تواند هر فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده‌ای باشد و تعابیر همه روابط منطقی و سورها توابعی پیوسته هستند. بعلاوه برای حصول بعضی نتایج، تعبیر نمادهای زبانی در ساختارها نیز باید توابع پیوسته‌ای باشند. در دهه ۲۰۰۰، بن‌یاکوف و همکارانش تعمیمی از منطق لوکاسیویچ که در آن مجموعه مقادیر درستی $[0,1]$ بود ارائه کردند که نوعی از منطق پیوسته چنگ-کیسلر نیز بود [2]. در منطق پیوسته بن‌یاکوف تعابیرِ روابط منطقی قادرند همه توابع پیوسته $u: [0,1]^2 \to [0,1]$ را تقریب بزنند و ساختارها فضاهای متریک یا شبه متریکی هستند که تعبیر همه نمادهای زبانی در ساختارها توابع پیوسته یکنواخت هستند. بدلیل پیوستگی روابط

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۴:۰۰ (به وقت محلی تهران)
۱۰:۳۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۳

منطقی در منطق لوکاسیویچ، تعمیم‌های دیگری نیز از منطق لوکاسیویچ به یک منطق پیوسته نیز ارائه شده است.

منطق مبتنی بر t-نرم پیوسته در سال ۱۹۹۸ توسط هایک به عنوان تعمیمی از منطق‌های لوکاسیویچ، گودل، و حاصل‌ضربی معرفی شد [4]. در منطق مبتنی بر t-نرم پیوسته، تعابیر روابط منطقی لزوماً پیوسته نیستند. برای بعضی از t-نرم‌ها مثل t-نرم لوکاسیویچ تعابیر همه روابط منطقی پیوسته هستند و برای بعضی دیگر از t-نرم‌ها مثل t-نرم گودل و حاصل‌ضربی تعبیر بعضی از روابط منطقی پیوسته نیستند.

خاتمی و پورمهدیان در [1] نشان دادند که با در نظر گرفتن معنی‌شناسی معکوس روی مجموعه مقادیر درستیِ $[0,1]$ برای منطق‌های مبتنی بر t-نرم پیوسته که 0 به معنی «راست» و 1 به معنی «دروغ» می‌باشد، می‌توان برای t-نرم‌های قوی‌تر از t-نرم لوکاسیویچ (s-نرم‌های ضعیف‌تر از s-نرم لوکاسیویچ) متریکی روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$ بدست آورد که تعبیر همه روابط منطقی پیوسته باشند. خاتمی در [5] این نتیجه را با معنی‌شناسی استاندارد و برای هر t-نرم پیوسته با یافتن توپولوژی‌هایی روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$ تعمیم می‌دهد. در این مقاله نشان می‌دهیم در ساختارهای پیوسته‌ای که در [5] معرفی شده‌اند، تعبیر همه فرمول‌ها توابع پیوسته‌ای هستند. علاوه برای این، مباحث این مقاله در کنار [2] نشان می‌دهند که شرط پیوستگی یکنواخت تعابیر نمادهای زبانی در منطق پیوسته بن‌یاکوف قابل تقلیل به پیوستگیِ معمولی می‌باشد.

۲. توپولوژی‌های $\boldsymbol{T}_*$ و $\mathbb{T}_*$ روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$

به ازای هر t-نرم پیوسته $*$، دو توپولوژیِ $\boldsymbol{T}_*$ و $\mathbb{T}_*$ روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$ وجود دارند بطوریکه تعبیر همه روابط منطقی تحت این توپولوژی‌ها توابع پیوسته‌ای هستند.

تعریف ۲ . ۱. فرض کنید $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ مانده t-نرم $*$ باشد. بعلاوه فرض کنید $e_*(x,y) = (x \Rightarrow_* y) * (y \Rightarrow_* x)$. برای هر $x \in [0,1]$ و هر $r \in [0,1)$ فرض کنید $B_r(x) = \{y: e_*(x,y) > r\}$. اکنون زیرمجموعه G از $[0,1]$ را یک زیرمجموعه $*$-باز میگوییم هرگاه به ازای هر $x \in G$ عدد حقیقیِ $r \in [0,1)$ موجود باشد بطوریکه $B_r(x) \subseteq G$.

قضیه ۲ . ۲. برای هر t-نرم پیوسته $*$، مجموعه همه زیرمجموعه‌های $*$-بازِ $[0,1]$ یک توپولوژی روی $[0,1]$ می‌سازند که آنرا توپولوژی $*$-باز می‌نامیم و با $\boldsymbol{T}_*$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲ . ۳. با مفروضات تعریف ۲ . ۱ برای $\bar{x} = (x_1, x_2)$ و $\bar{y} = (y_1, y_2)$ تعریف کنید

$\bar{e}(\bar{x}, \bar{y}) = e_*(x_1, y_1) * e_*(x_2, y_2)$. برای هر $x \in [0,1]$ و هر $r \in [0,1)$ فرض کنید $B_r(\bar{x}) = \{\bar{y}: \bar{e}_*(\bar{x}, \bar{y}) > r\}$. اکنون زیرمجموعه G از $[0,1]^2$ را یک زیرمجموعه $*$-باز میگوییم هرگاه به ازای هر $\bar{x} \in G$ عدد حقیقیِ $r \in [0,1)$ موجود باشد بطوریکه $B_r(\bar{x}) \subseteq G$.

قضیه ۲ . ۴. برای هر t-نرم پیوسته $*$، مجموعه همه زیرمجموعه‌های $*$-بازِ $[0,1]^2$ یک توپولوژی روی $[0,1]^2$ می‌سازند که آنرا توپولوژی $*$-باز می‌نامیم و با $\mathbb{T}_*$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲ . ۵. برای هر t-نرم پیوسته $*$، فضاهای توپولوژیکِ $([0,1], T_*)$ و $([0,1]^2, \mathbb{T}_*)$ هاسدورف و نرمال هستند و در اولین اصل شمارایی صدق می‌کنند.

قضیه ۲ . ۶. برای هر t-نرم پیوسته $*$، توپولوژی $\mathbb{T}_*$ روی $[0,1]^2$ معادلِ توپولوژیِ حاصل‌ضربیِ حاصل از T_* روی $[0,1]^2$ است.

قضیه ۲ . ۷. برای هر t-نرم پیوسته $*$، هم $*$ و هم مانده آن توابعی پیوسته از $([0,1], T_*)$ بتوی $([0,1]^2, \mathbb{T}_*)$ هستند. لذا تعبیر تمام روابط منطقی تحت توپولوژی‌های T_* و $\mathbb{T}_*$ توابعی پیوسته هستند.

توپولوژی تشابه روی ساختارها و ساختارهای پیوسته

در تمام این بخش فرض کنید $\mathscr{L}$ یک زبان مرتبه اول و ρ یک محمول دوموضعی روی آن باشد.

قضیه ۳ . ۱. فرض کنید $\mathscr{M}$ یک $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول باشد و در اصول تشابه به صورت زیر صدق کند:

$$\forall x\, \rho(x, x)$$

$$\forall x \forall y \rho(x,y) \leftrightarrow \rho(y,x)$$

$$\forall x \forall y \forall z[\rho(x,y) \& \rho(y,z)] \rightarrow \rho(x,z)$$

برای هر $a \in M$ و هر $r \in [0,1)$ فرض کنید $B_r^\rho(a) = \{b: \rho^{\mathcal{M}}(a,b) > r\}$. زیرمجموعه G از M را یک مجموعه ρ-باز می‌نامند هرگاه به ازای هر $a \in G$ عدد حقیقیِ $r \in [0,1)$ موجود باشد بطوریکه $B_r^\rho(a) \subseteq G$. در این صورت مجموعه همه مجموعه‌های ρ-بازِ M یک توپولوژی روی M می‌سازند که آنرا توپولوژی تشابه حاصل از ρ روی M می‌نامند و با T^ρ نمایش می‌دهند.

قضیه ۳ . ۲. فرض کنید $\mathscr{M}$ یک $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول باشد و برای محمولِ ρ در اصول تشابه صدق کند. بعلاوه برای nتاییِ‌های $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $\bar{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ فرض کنید $\rho_n(\bar{x},\bar{y}) = \rho(x_1,y_1) \& \rho(x_2,y_2) \& \cdots \rho(x_n,y_n)$ و برای برای هر $\bar{a} \in M^n$ و هر $r \in [0,1)$ فرض کنید $B_r^{\rho_n}(\bar{a}) = \{\bar{b}: \rho_n^{\mathcal{M}}(\bar{a},\bar{b}) > r\}$. اکنون زیرمجموعه G از M^n را یک مجموعه ρ-باز می‌نامند هرگاه به ازای هر $\bar{a} \in G$ عدد حقیقیِ $r \in [0,1)$ موجود باشد بطوریکه $B_r^{\rho_n}(a) \subseteq G$. در این صورت مجموعه همه مجموعه‌های ρ-بازِ M^n یک توپولوژی روی M می‌سازند که آنرا توپولوژی تشابه حاصل از ρ روی M^n می‌نامند و با T^{ρ_n} نمایش می‌دهند. T^{ρ_n} معادل است با توپولوژیِ حاصل‌ضربیِ حاصل از T^ρ روی M^n.

لازم به ذکر است توپولوژی‌های تشابه روی M و M^n لزوماً هاسدورف نمی‌باشند.

قضیه ۳ .۳. فرض کنید $\mathscr{M}$ یک $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول باشد و برای محمولِ ρ در اصول تشابه صدق کند. بعلاوه فرض کنید نماد تابعیِ n موضعیِ f در اصل مصداقیت تشابه به صورت $\forall \bar{x} \forall \bar{y}[\rho_n(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow \rho(f(\bar{x}), f(\bar{y}))]$ صدق کند. در این صورت تعبیر f در ساختار $\mathscr{M}$

تابعی پیوسته از (M^n, T^{ρ_n}) بتوی (M, T^ρ) است.

قضیه ۳ .۴. فرض کنید $\mathscr{M}$ یک $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول باشد و برای محمولِ ρ در اصول تشابه صدق کند. بعلاوه فرض کنید نماد محمولیِ n موضعیِ R در اصل مصداقیت تشابه به صورت $\forall \bar{x} \forall \bar{y}[\rho_n(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow (R(\bar{x}) \leftrightarrow R(\bar{y}))]$ صدق کند. در این صورت تعبیر R در ساختار $\mathscr{M}$

تابعی پیوسته از (M^n, T^{ρ_n}) بتوی $([0,1], T_*)$ است.

تعریف ۳ .۵. فرض کنید $\mathscr{M}$ یک $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول باشد و برای محمولِ ρ در اصول تشابه صدق کند. $\mathscr{M}$ را یک $\mathscr{L}$-ساختار پیوسته می‌نامند هرگاه به ازای همه نمادهای تابعی و محمولیِ موجود در زبان $\mathscr{L}$ در اصول مصداقیت تشابهِ ذکر شده در قضایای ۳ . ۳ و ۳ . ۴ صدق کند.

قضیه ۳ .۶. فرض کنید $\mathscr{M}$ یک $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول پیوسته باشد. در این صورت تحت توپولوژی‌های *-باز و تشابه، تعبیر همه ترم‌ها و فرمول‌ها، توابعی پیوسته هستند.

اگر در مفهوم ساختار، تعبیر محمول‌ها به صورت توابع جرئی تعریف شود، آنگاه می‌توان ضرب مستقیم ساختارها را به صورت زیر تعریف کرد. لازم به ذکر است چنانچه $([0,1], T_*)$ یک فضای توپولوژیک کشی-کامل باشد، آنگاه نیازی به تعریفِ تعبیر محمول‌ها به صورت توابع جرئی نیست. بعلاوه در حالتی که مجموعه مقادیر درستی یک زیرمجموعه از $[0,1]$ مثل B انتخاب شود که یک BL-جبر باشد و (B, T_*) کشی-کامل باشد، مجدداً نیازی به تعریفِ تعبیر محمول‌ها به صورت توابع جرئی نیست.

قضیه ۳ . ۷. فرض کنید $\mathscr{L}$ یک زبان مرتبه اول با محمول تشابه ρ و $\{\mathscr{M}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول پیوسته باشند و $\mathscr{F}$ یک فیلتر روی I باشد. بعلاوه فرض کنید $M = \prod_{i\in I} M_i$ و رابطه $\sim$ روی M را به صورت به این صورت تعریف می‌کنیم که $(a_i) \sim (b_i)$ هرگاه (a_i) و (b_i) در مجموعه‌ای بزرگ از ساختارها که توسط اندیس‌هایی از عناصر $\mathscr{F}$ اندیس‌گذاری شده‌اند، تحت رابطه تشابه ρ، مشابه باشند. یعنی

$$(a_i) \sim (b_i) \text{ اگر و فقط اگر } \{i: \rho^{\mathscr{M}_i}(a_i, b_i) = 1\} \in \mathscr{F}$$

در این صورت رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی M است. بعلاوه $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول $\mathscr{M}_{\mathscr{F}}$ که ساختارش به صورت زیر است، خوش‌تعریف می‌باشد:

- جهان سخنِ $\mathscr{M}_{\mathscr{F}}$ عبارت است از مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$ روی M.
- برای هر نماد تابعی n موضعیِ f،

$$f^{\mathscr{M}_{\mathscr{F}}}([(a_i)]_\sim,[(b_i)]_\sim,\cdots,[(c_i)]_\sim) = [(f^{\mathscr{M}_i}(a_i,b_i,\cdots,c_i)]_\sim$$

- برای هر نماد محمولی n موضعیِ R،

$$R^{\mathscr{M}_{\mathscr{F}}}([(a_i)]_\sim,[(b_i)]_\sim,\cdots,[(c_i)]_\sim) = \lim_{\mathscr{F}}[(R^{\mathscr{M}_i}(a_i,b_i,\cdots,c_i)]_\sim$$

قضیه ۳ . ۸. فرض کنید $\mathscr{L}$ یک زبان مرتبه اول با محمول تشابه ρ و $\{\mathscr{M}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از $\mathscr{L}$-ساختار مرتبه اول پیوسته باشند و $\mathscr{F}$ یک فرافیلتر روی I باشد. اگر $([0,1],T_*)$ یک فضای توپولوژیک فشرده باشد و یا مجموعه مقادیر درستی یک زیرمجموعه از $[0,1]$ مثل B انتخاب شود که یک BL-جبر باشد و (B,T_*) فشرده باشد، آنگاه به ازای هر فرمول n موضعیِ φ

$$\varphi^{\mathscr{M}_{\mathscr{F}}}([(a_i)]_\sim,[(b_i)]_\sim,\cdots,[(c_i)]_\sim) = \lim_{\mathscr{F}}[(\varphi^{\mathscr{M}_i}(a_i,b_i,\cdots,c_i)]_\sim$$

فهرست منابع

[1] خاتمی، س. م. ا. و پورمهدیان، م. (۱۳۹۸)، منطق پیوسته، منطق‌پژوهی، شماره ۱۹، ۸۹-۱۲۰.

[2] Ben Yaacov, I. and Berenstein, A. and Henson C.W. and Usvyatsov, A. (2008), “Model theory for metric structures”, Model theory with applications to algebra and analysis, Vol. 2, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 350, Cambridge University Press, p. 315-427.

[3] Chang, C.C. and Keisler, H.J. (1966), Continuous Model Theory, Princeton University Press.

[4] Hájek, P. (1998), Metamathematics of Fuzzy Logic, Springer Science.

[5] Khatami, S. M. A. (2022), Compactness of first-order fuzzy logics, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 19, No. 3, p. 53-68.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

ضرورت طبیعی و اینهمانی آن با ضرورت منطقی در فلسفهٔ ارسطو؟

امیرعلی موسویان
دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده: در خصوص اینکه آیا گزاره‌هایی با محتوای تجربی هیچ‌گاه نمی‌توانند ضرورتاً صادق باشند و اساساً چه نسبتی میان ضرورت منطقی و ضرورت طبیعی برقرار است، نگاه‌های دیگری هم وجود دارند. برخی معتقدند که اگر مفهوم ضرورت را وصفی تنها برای گزاره‌های تحلیلی یا غیروابسته به چیزی خارج از معنای جمله لحاظ کنیم، آنگاه میان ضرورت و امر واقع یا واقعیت تجربی شکاف و فاصله‌ای پرناشدنی ایجاد می‌شود. در این مقاله در پی بررسی تفاوت میان موجهات منطقی و طبیعی و اساساً تفاوت‌های ضرورت‌های منطقی یا مفهومی و ضرورت فیزیکی یا طبیعی از سوی دیگرم. اینکه آیا ادعای اینهمانی و وحدت انحاء ضرورت در فلسفه‌ی طبیعی، متافیزیک و ریاضیات از دیدگاه ارسطو قابل اثبات است؟ ضرورت منطقی در مقدمات برهان یا قیاس علمی چگونه و به چه نحو ضرورت مورد نیاز در زیست‌شناسی را تأمین خواهد کرد؟ آیا ارسطو استحکام ضرورت طبیعی را در اندازه‌ی ضرورت موجهاتی یا منطقی می‌داند؟ یک رویکرد برای حل این مسئله، یگانه دانستن ضرورت منطقی و طبیعی بوده تا آن اندازه که قدرت و استحکام ضرورتِ تابع امر واقع و دارای محتوای تجربی (ضرورت طبیعی) را از همان مرتبه و درجه‌ی ضرورت منطقی برخوردار بدانیم.

کلید واژه‌ها: ارسطو، موجهات، ضرورت منطقی، ضرورت طبیعی، واقعیت

مقدمه

ارسطو در فصل هشتم کتاب کاپای *متافیزیک*، ضرورت آنچه همه‌زمانی است یعنی همواره و به حکم ضرورت وجود دارد را ضرورت به معنای قسر بیان نمی‌کند، بلکه همان ضرورت به کار رفته در برهان می‌داند (1064b32-4). می‌توان از این نکته دانست که ضرورت در معنای زمانی آن یعنی صدق و تحقق دائمی یک چیز، از همان نوع ضرورتی است که در برهان و نتیجهٔ مقدمات حاصل می‌شود. از این‌رو نزد ارسطو و فیلسوفان باورمند به موجهات زمانی، ضرورت‌های همه‌زمانی *طبیعی* یا ضرورت‌های دائمی فیزیکی در صورت وجود چه به بیان واترلو شناختنی و چه ناشناختنی باشند[۱]، از درجهٔ الزام و ایجاب کمتری از ضرورت در منطق برخوردار نیستند. ضرورت در فلسفهٔ ارسطو هم‌زمان با برخوداری از

1 Waterlow (2003: 47)

سالن ۳۱۱

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۴:۴۰ (به وقت محلی تهران)
۱۱:۱۰ (به وقت گرینویچ)

مبانی منطقی، بار وجودشناختی و ناظر به واقعیت طبیعی دارد. اساساً در این نظام فکری غیر از تمایز مفهومی، تمایزی میان ضرورت منطقی و وجودی نیست.

اینهمانی ضرورت منطقی یا موجهاتی با ضرورت طبیعی (فیزیکی)؟

به منظور فهم ضرورت نزد ارسطو و درک وی از اصل موجبیت گاه باید به مقایسهٔ انواع و اقسام ضرورت از دیدگاه او پرداخت تا معلوم شود که ارسطو با چه تنوع یا وحدتی به ضرورت می‌اندیشد. امروزه بسیاری ارزش نظریهٔ ارسطو را در تفسیر وی از تبیین علمی در *تحلیلات ثانی* برآورد می‌کنند. یکی از مبانی فرق‌گذاشتن میان ضرورت منطقی و طبیعی، دیدگاه صوری محض به منطق و خالی از محتوا دانستن این علم فارغ از خاستگاه واقعی آن است. اما نزد ارسطو اصول، قوانین و گزاره‌های منطق ناظر به واقعیت‌اند. از این دیدگاه، اصل امتناع تناقض تا اثبات جزئیه بودنِ عکس مستوی قضیهٔ موجبهٔ کلیه و نمونه‌های فراوان دیگر دالّ بر آن است که منطق در چشم ارسطو بخشی از فلسفه و انتولوژی است.

مفروضات مربوط به اوصاف منطقی معنای امکان و ضرورت منتهی می‌شود به نظریاتی دربارهٔ آنچه در واقع می‌تواند یا نمی‌تواند رخ دهد. این رویکرد با اختلاط کامل در تفاوت میان موجهات منطقی و طبیعی[1]، تفاوت‌های ضرورت منطقی یا مفهومی با ضرورت فیزیکی یا طبیعی را محو می‌کند. راه‌کار ارسطو به منظور بررسی تمایز میان ضرورت معرفت‌شناختی یا منطقی با ضرورت فیزیکی یا علّی، احتمالاً توسل به تمایز میان این دو ضرورت از رهگذر تمایزی به کلی متفاوت یعنی تمایز میان ضرورت مطلق و مشروط است[2]. ضرورت مشروط، ضرورتی در «شرایط» یا «زمان» قابل‌تعیین قطعی است اما ضرورت مطلق بدون هیچ قیدی از جمله قیود زمانی تصریح می‌شود. در بیان ارسطو از تمایز میان این دو ضرورت، نشانه‌ای از تن میان آنها نیست[3]؛ ضرورت مطلق عملاً و تقریباً نوع خاصی از ضرورت مشروط است و حتی ضرورت مشروط می‌تواند تبیین‌پذیر به حسب ضرورت مطلق باشد[4].

اگر تفکیک منطقی و فیزیکی را دربارهٔ امکان هم لحاظ کنیم، یک دلیل چرایی تمایز میان امکان منطقی و امکان طبیعی که به ارسطو نسبت می‌دهکند به‌واسطهٔ تعریف وی از امکان است۵. گویا این تعریف ناظر به امکان منطقی به کار رفته است. اگر اصول و مسائل فیزیکی و متافیزیکی نظیر اصل موجبیت و اصل کمال در نظر گرفته شوند، این معنا از امکان شامل مفهوم امکان منطقی صرف نیست و باید به امکان فیزیکی ناظر به واقعیت عینی خارجی نظر داشت. در

---

1 Physical Modalities

۲ ضرورت مشروط و مطلق به عنوان نمونه در فیزیک، 2، 9، 35-199b34 و دربارهٔ آسمان، 1، 12، 281b3ff.

۳ (Hintikka (1977: 34؛ این رأی هینتیکا محصول رویکرد زمانی به موجهات است. همان‌گونه که پیش از این بیان شد ضرورت در هر لحظه از زمان می‌تواند به نحوی فهمیده شود که ضرورت مطلق موجبیت‌گرایانه در آن لحظهٔ زمان، حکمفرما و محور تعریف و تبیین ضرورت مشروط باشد.

۴ بنگرید به (Preus (1969: 99

۵ آن چیزی ممکن است که بتواند فرض شود واقعی و بالفعل است، بی‌آنکه ناممکنی از این فرض حاصل شود.

این‌باره بحث ارسطو ناظر به پتانسیل‌های ظاهر شده در آغاز حرکت و جنبش در متافیزیک، 9، 3، 29-1047a20 حایز اهمیت است.[۱]

فهم علیت در ساختار نظریهٔ قیاس ارسطویی موجب می‌شود ضرورت ناظر به برهان به عنوان منظری از ضرورت‌های منطقی با ضرورت تبیین و علیت که ناظر به ضرورت فیزیکی و طبیعی است، نسبت پیدا کند. هنگامی‌که تبیین را نمی‌توان فاقد محتوای تجربی دانست، ضرورت برآمده از علت و تبیین در صورت اینهمانی با ضرورت منطقی به آنجا منتهی می‌شود که ضرورت منطقی با ضرورت تجربی، فیزیکی و طبیعی همسان شود. ضمن آنکه مسأله‌ای که در علوم تجربی مانند زیست‌شناسی مطرح است، مربوط به دشواری پیروی از احکام و قواعد تحلیلات ثانی است. فرده به این جمله از بالم از شارحان و مصححان آثار خصوصاً جانورشناسانهٔ ارسطو اشاره می‌کند که ((فراشدهای طبیعی از برهان (apodeixis) سرپیچی یا آن را نقض می‌کنند. ارسطو کاملاً موافق با این رأی است)) (Balme, 1939: 137). فرده دلیل موافقت ارسطو را دشواری و صعوبت فهمیدن و معلوم‌کردن آنچه دربارهٔ اشیاء و هویات طبیعی، ذاتی است و اینکه فرایندهای طبیعی چه خط و مسیری را در پیش می‌گیرند، بیان می‌کند (Frede, 1985: 212).

اگر بر اساس تعریف اصل موجبیت همه چیز از پیش متعین باشد یعنی آینده و وقایع آن به لحاظ معرفت‌شناختی بدون ابهام، پیش‌بینی‌پذیر، مشخص و متعین باشد، این موجبیت‌گرایی نافی امکان و تحول در عالم است و بسیار متفاوت از «ضروری» در معناهای دیگر است که حتی در یکی از تعاریف «امکان»، ضروری یکی از انواع «ممکن» دانسته شده است.[۲]

فهرست منابع

Ackrill, J., *Categories and De Interpretatione*, Translated with notes, Oxford: Oxford University Press, 1963.

Aristotle, *Aristotelis Opera*. Berlin, 1831–1870. Vols. 1, 2 Text, ed. I. Bekker

Aristotle and Ross, W. D. *Aristotle's Physics: A Revised Text* (Oxford: Clarendon Press, 1936).

۱ بنگرید به *متافیزیک*، 9، 5؛ و معنای *کینتیک* (جنبشی) در *متافیزیک*، 9، 7.

۲ ((ناظر به پیش‌گذارده‌های ممکن (τὰ ἐνδεχόμενα) از آنجا که «امکان» به معانی مختلف به کار می‌رود (زیرا ما آنچه ضروری است و آنچه ضروری نیست (τὸ μὴ ἀναγκαῖον) و آنچه بالقوه است (τὸ δυνατόν) را ممکن می‌گوییم). . .))(*تحلیلات اولی*، 1، 3، 25a37-40)

Aristotle, 1981, *Metaphysics*: *a revised text with introduction and commentary*, by Ross (first published 1924), Oxford: Clarendon Press.

Aristotle, *Metaphysics Books 7-10*, Translated by Montgomery Furth 1985, Hackett Publishing Company.

Aristotle: *The Complete Works of Aristotle*: *The Revised Oxford Translation*, Two Vols. Edited by Jonathan Barnes, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1984.

Balme, D. M. 1939. 'Greek science and mechanism 1. Aristotle on nature and chance', *Classical Quarterly* xxxin, 129-138.

Barnes, J., 1993 (first published 1975) *Posterior Analytics*, Second Edition, Translation and notes. Clarendon Aristotle Series, Oxford.

Barnes, J., *Aristotle*: *A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

Bekker, I. (1831). *Aristoteles graece*. Reimer.

Frede, Dorothea, Aristotle on the Limits of Determinism: Accidental Causes in Metaphysics E 3, pp. 207-225, in *Aristotle on Nature and Living Things, Philosophical and Historical Studies Presented to David M. Balme on his Seventieth Birthday*, ed. Allan Gotthelf, Pittsburgh/Bristol, 1985.

Hintikka, J. *Time and Necessity*, Oxford 1973.

Hintikka, J. with U. Remes and S. Knuuttila, *Aristotle on Modality and Determinism*, *Acta Philosophica Fennica* 29, Amsterdam 1977.

Leunissen, Mariska, (2007), *Explanation and Teleology in Aristotle's Philosophy of Nature,* PhD dissertation, University of Leiden.

Leunissen, M. (2010), *Explanation and Teleology in Aristotle's Science of Nature,* New York: Cambridge University Press.

Makin, S., *Metaphysics Theta*, Translated with an introduction and commentary, Oxford: Oxford University Press, 2006.

Mure, G. R. G., *Posterior Analytics*, translation of Aristotle, under the editorship of W. D. Ross, 1925.

Peck, A. L. tr. *Aristotle, Generation of Animals.* Loeb Classical Library. Cambridge, Mass.: 1942.

Peck, A. L. *Aristotle: Generation of Animals* (London, 1953).

Preus, Anthony, 'Aristotle's Natural Necessity', *Studi Internationali di Filosofia*, Vol. 1 (1969), pp. 91-100

Ross, W. D., 1924, *Aristotle's Metaphysics*, Oxford: Clarendon Press.

Ross, W. D., *Aristotle's Prior and Posterior Analytics, A Revised Text with Introduction and Commentary*, Oxford, At The Clarendon Press, 1957.

Waterlow, Sarah (first published 1982), *Passage and Possibility*: *A study of Aristotle's Modal Concepts*, Oxford University Press, 2003.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

صوری‌سازی مراتب حجیت شرعی با استفاده از شرطی‌های غیرکلاسیک

فاطمه سادات نبوی[۱]، حسین کامکار[۲*]، زینت آی تاللهی[۳]، علیرضا شهبازی[۴]

۱ .دانشگاه قم، قم، ایران / fs.nabavi@gmail.com

۲ .حوزه علمیه مشکات (*: ارائه‌دهنده مقاله) / kamkar.hoseim@gmail.com

۳ .فلسفه منطق دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران / z_ayat13@yahoo.com

۴. حوزه علمیه قم، قم، ایران / onto.ir-shahbazi@borhan

چکیده: در این مقاله با استفاده از منطق‌های Count As (منطق‌های مربوط به نهادها) و بر اساس منطق‌های غیریکنوا و همچنین با بهره جستن از زبان منطق توجیه، یک دستگاه اصل موضوعی منطقی برای امارات و اصول عملیه در علم اصول فقه ارائه می‌شود که می‌تواند مهم‌ترین ویژگی‌های منطقیِ آن‌ها را بازنمایی کند، از جمله این‌که بین لوازم عقلی و لوازم شرعی تفکیک قائل بشود و مثبتات اصول عملیه را فاقد حجیت بداند، در عین اینکه مثبتات امارات را حجت بداند.

.

کلید واژه‌ها: صوری‌سازی اصول فقه، منطق Count As، منطق غیریکنوا، منطق توجیه، امارات، اصول عملیه

مقدمه

مقصود از نهاد عبارت است از یک نظامِ برپاشده برای مقصودی معین. به عنوانِ مثال، دولت یک نهاد است . بنیانگذاران/ متولیانِ نهادها، برای رسیدن به مقاصدِ نهاد، به وضع مقرراتِ مناسب و احیاناً تعریفِ واژگان جدید یا بازتعریفِ واژگانِ موجود می پردازند. شریعت را نیز از این حیث می توان به مثابه ی یک نهاد در نظر گرفت.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۴:۴۰ (به وقت محلی تهران)
۱۱:۱۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۳

ساختاری که علمای فقه بر اساسِ آن به استنباطِ شریعت می‌پردازند در علمی ریشه‌دار و کهن موسوم به «علمِ اصولِ فقه» مدوّن گشته و موردِ مطالعه قرار می‌گیرد. هدفِ این علم، ارائه‌ی یک روش‌شناسیِ معقول برای استنباطِ احکام و تکالیفِ مسلمانان است. هدف از مقاله‌ی حاضر، عبارت است از صوری‌سازیِ *امارات* و *اصولِ عملیه* در علمِ اصول در یک سیستمِ اصلِ موضوعی با بهره جستن از چند نظامِ منطقیِ شناخته‌شده، به صورتی که انتظاراتِ اولیه در قبالِ این دو رده از دلایلِ فقهی برآورده شود.

در واقع در هر نهاد (از جمله شریعت) دست‌کم سه گونه گزاره‌ی شرطی وجود دارد:

۱. گزاره‌های شرطی علّی-منطقی
۲. گزاره‌های شرطی تکلیفی
۳. گزاره‌های شرطی توصیفی‌ای[۵] که برای تعریف یا بازتعریف مفاهیم در داخل نهاد استفاده می‌شوند.

صدق و اعتبارِ نوعِ (۱) به نهاد بستگی ندارد، اما صدق و اعتبار دو دسته دیگر از گزاره‌های شرطی به نهاد وابسته است.

مثلا فرض کنید مجموعه‌ی قوانین سربازی (نظام وظیفه‌ی عمومی) را نهاد اجتماعی S بدانیم، حال گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

A. اگر شخصِ S در سالِ ۱۳۸۰ متولد شده باشد آن‌گاه شخصِ S در سالِ ۱۴۰۰ بیش از ۱۸ سال سن دارد.
B. مشمولان باید خود را به سازمان نظام وظیفه معرفی کنند.
C. اگر شخصِ S مذکر و دارای ۱۸ سال یا بیشتر باشد، مشمول محسوب می‌شود.

در این‌جا، گزاره‌ی A گزاره‌ی شرطی معمولی معتبری است که صدق آن وابسته به نهاد s نیست. برای تبیین گزاره های شرطی علی-منطقی از نماد شرطی منطق کلاسیک استفاده می کنیم.

[۴] برای توصیف مختصری از «نهاد» / «قدرت نهادینه‌شده» (Institutionalized Power) نک: مقدمه‌ی [۳].
[۵] مقصود از «توصیفی» در برابر «تکلیفی» است، یعنی شرطی‌ای که تالیِ آن سرشت تکلیفی ندارد. از این حیث مشابه *احکام وضعی* در فقه است.

گزاره‌ی B یک گزاره‌ی شرطی تکلیفی است و از گزاره‌های داخل نهاد است. فرم کلی گزاره‌های شرطی تکلیفی به شکل «اگر P آنگاه باید Q» است که به تفصیل در پیشینه‌ی منطق تکلیف[۶] مورد بررسی قرار گرفته‌اند و متفاوت بودن شرطی آن با شرطی کلاسیک با توجه به پارادوکس‌های منطق تکلیف استاندارد امری پذیرفته شده است.

گزاره‌ی C نیز بیان‌گرِ گزاره‌ی شرطی توصیفیِ در چارچوبِ نهاد است. گاه چنین است که این گزاره‌ها به تعریف/ بازتعریفِ یک مفهوم در چارچوبِ یک نهاد می‌پردازند، اما صورت‌های دیگری هم برای کاربستِ آن‌ها وجود دارد. به صورتِ کلی اگر P و Q دو گزاره باشند، صورتِ جملات توصیفی در چارچوبِ نهاد به این شکل است:

P counts as Q in context S

P در پیش‌زمینه‌ی S به‌منزله‌ی Q شمرده می‌شود.

به این نوع شرطی‌ها، شرطی‌های Count As گفته می‌شود و در منطق‌هایی به همین نام بررسی شده‌اند.

در مقاله‌ی پیشِ رو، نخست به معرفیِ مفهومیِ ۱. امارات و ۲. اصول عملیه و تفاوت‌های پیامدهای منطقیِ هر یک از آن‌ها خواهیم پرداخت. در بخشِ دوم سیستم‌های منطقی پایه برای صوری‌سازی را معرفی می‌کنیم و با استفاده از سیستم اصل موضوعی که در [۳] برای شرطی های توصیفی در چارچوبِ نهادِ s با نماد $\Rightarrow_s$ معرفی شده، یک فرمال‌سازی برای امارات و اصول عملیه در اصول فقه ارائه دهیم. نهایتا در بخش سوم، با تلفیقِ این سیستم‌ها، *اماره* و *اصل عملی* را صوری کرده و در چند مثال، می‌آزماییم.

معرفیِ امارات و اصول علمیه در علم اصول

در این‌جا به معرفی مختصری از امارات و اصول عملیه و برخی ویژگی‌های منطقی آن‌ها می‌پردازیم که منبع [۷] را می‌توان به عنوان یک متن استاندارد برای شرح بیش‌تر معرفی کرد. در مباحث تکلیفی شرعی در کنار مفهوم *علم به تکلیف*، مفهوم مهمی تحت عنوان «*حجت بر تکلیف*» مطرح می‌شود. حجت به معنای دلیلی است که فقیه می‌تواند در پیشگاه خداوند متعال بدان متوسل شود تا فتوای خود را موجه کند:

X حجت است اگر و تنها اگر استنادِ فقیه به X در افتاء نزد خداوند موجّه باشد.[۷]

---

[6] Deontic logic

[۷] حجیت را می‌توان به صورتِ عام‌تری هم مطرح کرد که شاملِ عمل مکلفان نیز باشد، ولی از آن‌جا که تمرکزِ مقاله‌ی حاضر بر «اصول فقه» است نه خودِ فقه، تعریف را ناظر به فقیهان در نظر گرفته‌ایم نه مکلفان.

در یک دسته‌بندیِ کلی [۷] می‌توان دلایلی را که فقیه به آن‌ها استناد می‌کند به این صورت طبقه‌بندی کرد:

۱) دلایلی که به یقین[۸] منتهی می‌شوند،
۲) دلایلی که ارزشِ معرفت‌شناسانه دارند ولی به یقین منتهی نمی‌شوند (دلایلِ ظنی)،
۳) دلایلی که ارزشِ معرفت‌شناسانه ندارند.

بنا بر یک دیدگاهِ استاندارد در اصولِ فقه می‌توان گفت: هر دلیلِ یقین‌آور، حجت است.

درباره‌ی دلایلِ ظنی، آن‌ها به دو رده‌ی «حجت» و «لا حجت» تقسیم می‌گردند. دلایلِ ظنی که حجیت داشته باشند «اَماره» نامیده می‌شوند (مثل خبردادنِ شخصِ موردِ وثوق یا ظهورِ یک متن) و دلایلِ ظنیِ فاقدِ حجیت، «ظن نامعتبر» خوانده می‌شوند (مثلِ قیاس یا استحسان).

اما گذشته از این‌ها، امورِ دیگری هم هستند که واجدِ حجیت‌اند اما ارزشِ معرفت‌شناسانه ندارند[۹]، مثلا وقتی در قبالِ یک مساله‌ی فقهی، نفیاً و ایجاباً نه یقین به دست آید و نه اماره، مکلف در یک تحیّر موقتی قرار می‌گیرد. در چنین شرایطی برای رفع تحیّر در *مقامِ عمل* می‌توان قواعدی را (مثلِ اصلِ برائت یا اصلِ احتیاط یا اصلِ تخییر یا ...) موردِ استناد قرار داد این موارد از آن جهت که تحیّر در مقامِ عمل را می‌زدایند *اصل عملی* نامیده می‌شوند.

مثال:

- یقین: وجوبِ روزه‌ی ماهِ رمضان در اسلام،
- اماره: احادیث معتبر درباره‌ی برخی جزئیاتِ وضو،
- ظن نامعتبر: فتوا بر اساسِ حدس و تخمین و گمانه‌زنی،
- اصل عملی: فرض کنید درباره‌ی حلال یا حرام بودنِ سیگار کشیدن، دلیل قطعی یا اماره‌ای پیدا نشود. در این‌جا می‌توان با استناد به *اصلِ برائت*، به جوازِ سیگار کشیدن حکم کرد.

بینِ *امارات* و *اصول عملیه* تفاوت‌های مهمی وجود دارد، از جمله این‌که لازمه‌های علّی-منطقیِ امارات هم واجدِ حجیت‌اند (چون امارات، جنبه‌ی شناختاری دارند) اما لازمه‌های علّی-منطقیِ اصولِ عملیه فاقدِ حجیت‌اند.

[۸] یقین در این‌جا به معنای سخت‌گیرانه‌ی فلسفیِ آن مدنظر نیست، بلکه شامل اطمینان و داناییِ متعارفِ مردمان نیز هست.
[۹] یا دقیق‌تر این است که بگوییم حتی اگر ارزشِ معرفت‌شناسانه داشته باشند، از این حیث حجیت به آن‌ها داده نشده و یا دست‌کم نکاتِ غیرشناختاریِ دیگری هم در حجیت آن‌ها نقش داشته است.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

مثلا فرض کنید شخصِ S کسی است که موردِ وثوق و اعتماد نیست، و S خبر می‌دهد که فعلِ A مباح است. حال دو سناریوی زیر را در نظر بگیرید:

سناریوی الف) شخصِ *S که فردی موردِ اعتماد و وثوق است هم خبر می‌دهد که فعلِ A مباح است. در این صورت هم می‌توان گفت فعلِ A مباح است و هم می‌توان گفت شخصِ S در خبری که داده، صداقت داشته است.

سناریوی ب) اماره‌ی دیگری نفیاً و ایجاباً پیدا نمی‌شود و با استناد به اصلِ برائت به جوازِ فعلِ A حکم می‌کنیم، اما در این حالت نمی‌توان بر اساسِ برائت گفت شخصِ S هم در خبری که داده، صداقت داشته است، چرا که اصلِ برائت تنها برای رفع تحیّر عملی است نه کشفِ شناختاری.

در این مثال می‌توان گفت:

شخصِ S صادق است اگر و تنها اگر انجامِ فعلِ A جایز باشد (یک تلازمِ علّی-منطقی).

حال اگر جوازِ A با یک اماره (خبرِ شخصِ *S) ثابت شود، می‌توان از تلازمِ علّی-منطقیِ فوق استفاده کرد و به صداقتِ S هم رسید، ولی اگر جوازِ A با یک اصلِ عملی (برائت) ثابت شود، نمی‌توان از تلازمِ علّی-منطقیِ یادشده استفاده کرد و صداقتِ S در آن خبر اثبات نمی‌شود.

در عینِ حال اگر جوازِ A بر اساسِ اصلِ عملی اثبات شود، انتظار می‌رود که همه‌ی پیامدهای شرعیِ اباحه هم برای آن وجود داشته باشد. مثلِ این‌که ارتکابِ A عدالتِ شخص را مخدوش نمی‌کند یا ...

بنابراین در عینِ این‌که انتظار می‌رود پیامدهای علّی-منطقیِ اصول عملیه فاقدِ حجیت باشند، انتظار می‌رود که پیامدهای شرعیِ آن‌ها واجدِ حجیت باشند.

اصولیان لازمه‌های علّی-منطقی با عنوانِ «لوازم عقلی» یا «مُثبَتات» نیز یاد می‌کنند و مثلا چنین می‌گویند:

- لوازمِ شرعیِ اصول عملیه حجت است ولی لوازمِ عقلیِ آن‌ها فاقدِ حجیت است.
- مُثبَتاتِ امارات حجت است ولی مُثبَتاتِ اصول عملیه فاقد حجیت است.

در این‌جا می‌خواهیم دستگاه‌های منطقیِ مناسبی را به کار ببریم که بتوانند تفکیک بین امارات و اصول عملیه و مثبتات آن‌ها را بر اساس آن‌ها مدل‌سازی کرد و تفاوت‌های مورد انتظار را برآورده کرد.

زمان ارائه **سالن ۳۱۱**
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سیستمهای منطقیِ پایه

دسته‌ای از منطق‌های شرطی که به فرمالسازی قوانین تاسیسی (گزاره‌های توصیفی که برای تعریف و یا بازتعریف اصطلاحات مورد نیاز در داخل نهاد استفاده می‌شوند) می‌پردازند، به منطق های «به شمار می رود...» (Counts As) مشهورند. برای ملاحظه‌ی مروری بر این منطق‌ها می‌توان به [۲] مراجعه کرد. در ادامه اصول موضوعه یکی از این منطق‌ها (سیستم جونز[10] و سرگات[11]) را از [۳] می‌آوریم.

مفهوم حجیت، یک مفهوم فسخ‌پذیر[12] است، به این معنا که حجیتِ X برقرار است مادامی‌که حجت‌های دیگری که بر آن تقدم دارند و بر خلاف آن هستند در بین نباشند. با توجه به ماهیتِ غیریکنوا[13] و فسخ‌پذیربودنِ مفهوم حجیت، از اصول KLM برای اصل‌موضوع‌بندی استنتاج فسخ‌پذیر استفاده می‌کنیم و از سیستم رجحانی[14] P (اکسیوم های KLM) برای منطق‌های فسخ‌پذیر بهره می‌بریم. ماهیتی فسخ‌پذیر و غیریکنوا دارند.(برای آشنایی با منطق های غیریکنوا می توان به [۵] مراجعه کرد)، در این فرایند به یک شرطی فسخ پذیر نیز نیازمندیم. اصول KLM به همین منظور در بخش ۲.۱ به نقل از [۴] آورده می شوند.

همچنین با توجه به قرابت معنایی مفهوم حجت شرعی و مفهوم توجیه، از زبان منطق توجیه[15] [۱] برای بیان حجیت استفاده می‌نماییم، هرچند در این مرحله از خصوصیات منطقی این مفهوم بهره‌ای نمی‌بریم.

سیستم جونز و سرگات برای شرطی‌های Count As

از شرطی های $\Rightarrow_s$ برای فرمول‌سازی Counts As استفاده می شود که انتظار می رود در اصول موضوعه زیر صدق کنند. (اندیس s اشاره به نهاد s دارد). مطابقِ [۳] اصولِ موضوعه‌ی این شرطی بدین شرح است:

نام اصل موضوع	اصل موضوع
RCEC.	$\dfrac{B \leftrightarrow B'}{(A \Rightarrow_s B) \leftrightarrow (A \Rightarrow_s B')}$
RCEA.	$\dfrac{A \leftrightarrow A'}{(A \Rightarrow_s B) \leftrightarrow (A' \Rightarrow_s B)}$
CC.	$((A \Rightarrow_s B) \wedge (A \Rightarrow_s C)) \rightarrow (A \Rightarrow_s (B \wedge C))$

[10] A. J. I. Jones
[11] M. Sergot
[12] Defeasible
[13] Nonmonotonic
[14] Preference Logic
[15] Justification Logic

CA. $((A \Rightarrow_s B) \wedge (C \Rightarrow_s B) \rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow_s B)$

S. $(A \Rightarrow_s B) \rightarrow ((B \Rightarrow_s C) \rightarrow (A \Rightarrow_s C))$

همچنین این شرطی با شرطی علّی-منطقی که در مدل با استلزام مادی نمایش داده می‌شود، متفاوت است. زیرا انتظار داریم در اصول موضوعه زیر صدق نکند.

RCM. $$\frac{B \rightarrow B'}{(A \Rightarrow_s B) \rightarrow (A \Rightarrow_s B')}$$

I. $A \Rightarrow_s A$

Sym. $(A \Rightarrow_s B) \wedge (B \Rightarrow_s A)$

CM. $(A \Rightarrow_s (B \wedge C)) \longrightarrow ((A \Rightarrow_s B) \wedge (A \Rightarrow_s C))$

از آنجا که برقرار نبودن اکسیوم RCM، دست ما را برای استفاده از نتایج شرطی های تاسیسی به عنوان فرض در استنتاجات بعدی می بندد، جونز و سرگات به زبان منطق خود، عمل‌گرِ وجهیِ نرمال D_S را برای بیان گزاره‌هایی که در نهادِ s معتبر است به سیستم اضافه کرده‌اند. $D_S A$ به معنای این است که گزاره‌ی A در نهادِ s معتبر است. این عمل‌گر در اصول‌موضوعه‌ی زیر صدق می‌کند:

Const. $(A \Rightarrow_s B) \rightarrow (A \rightarrow D_S A)$

DK. $D_S(A \rightarrow B) \rightarrow (D_S A \rightarrow D_S B)$

DD. $D_S A \rightarrow \neg D_S \neg A$

هم چنین در اصل زیر صدق نمی کند:

DT. $D_S A \rightarrow A$

زیرا می خواهیم گزاره زیر سازگار باشد:

$$D_S(A \rightarrow B) \wedge D_{S'}(A \rightarrow \neg B)$$

سیستمِ P برای شرطی‌های فسخ‌پذیر

اصول KLM:

(Ref)	$\phi \vdash \phi$
($\vdash$ Cut)	$\phi \wedge \psi \vdash \theta \ \ \& \ \ \phi \vdash \psi \ \ \text{yields} \ \ \phi \vdash \theta$
(CM)	$\phi \vdash \psi \ \ \& \ \ \phi \vdash \theta \ \ \text{yields} \ \ \phi \wedge \psi \vdash \theta$
(LLE)	$\vDash \phi \equiv \psi \ \ \& \ \ \phi \vdash \theta \ \ \text{yields} \ \ \psi \vdash \theta$
(RW)	$\vDash \phi \rightarrow \psi \ \ \& \ \ \theta \vdash \phi \ \ \text{yields} \ \ \theta \vdash \psi$
(OR)	$\phi \vdash \psi \ \ \& \ \ \theta \vdash \psi \ \ \text{yields} \ \ \phi \vee \theta \vdash \psi$

قانونِ AND نیز از قوانین بالا قابل استنتاج است:

(AND)	$\phi \vdash \psi \ \ \& \ \ \phi \vdash \theta \ \ \text{yields} \ \ \phi \vdash \theta \wedge \phi$

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

فرمالسازی و آزمودن اصول موضوعه برای امارات و اصول عملیه

در منطق توجیه برای بیان «t شاهدی است بر صدق A» از نمادِ (t : A) استفاده می شود. شواهد را می‌توان با دو عمل‌گرِ . و + ترکیب کرد که برای مطالعه بیشتر در مورد آن‌ها می‌توان به [۱] مراجعه کرد.

ما از نمادِ (t : A) برای بیان جمله‌ی «اماره‌ی t بر صدق A وجود دارد» و از نمادِ (k : A) برای بیان جمله‌ی «اصل عملی k به سود A وجود دارد» استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض می کنیم تمام امارات استفاده شده در پیش زمینه مباحث ما در دنباله t_1 و t_2 و.... به ترتیب قوت مرتب شده اند. هم‌چنین برای بیان اصل عملی از k_i استفاده می‌کنیم و فرض می کنیم تمامی k_i ها نیز بر اساس میزان اهمیت و تاثیر در دنباله ... $k_1, k_2, k_3,$ مرتب شده اند.

اصول موضوعه زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

P1 $$(t_i{:}\,\varphi) \vdash \varphi$$

P2 $$(t_i{:}\,\varphi) \vee (t_j{:}\,\varphi) \vdash (t_i{:}\,\varphi) \quad (\text{اگر } i \leq j)$$

P3 $$\vdash (k_i{:}\,\varphi) \ \Rightarrow_s \ \varphi$$

درمثال‌های بعدی نشان می دهیم که این اصول چگونه برای به دست آوردن استنتاج‌های مورد نیاز به کار گرفته می شوند.

مثالِ ۱-۳. فرض می‌کنیم اماره‌ای برای وجوب p_1 داریم؛ یعنی: $(t_1{:}\,Op_1)$ در این صورت می‌توان Op_1 را به‌طور فسخ‌پذیر استنتاج کرد . زیرا طبقِ P1:

$$(t_i{:}\,Op_1) \vdash Op_1$$

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

مثال ۲-۳. حال فرض می‌کنیم اصل عملی در توجیه وجوب p_1 داریم؛ یعنی: $(k_i\colon Op_1)$. استنتاج زیر نشان می‌دهد چگونه در پیش‌زمینه‌ی S می‌توان Op_1 را به طور فسخ‌پذیر بدست آورد.

نمونه‌ای از اصل موضوع P3	۱, $\vdash (k_i\colon Op_1) \Rightarrow_s Op_1$
نمونه‌ای از اصل موضوع Const	۲, $\vdash (k_i\colon Op_1) \Rightarrow_s Op_1 \rightarrow ((k_i\colon Op_1) \rightarrow D_S(Op_1))$
سطر ۱ و ۲ و RW	۳, $\vdash (k_i\colon Op_1) \rightarrow D_S(Op_1)$
(Ref)	۴, $(k_i\colon Op_1) \vdash (k_i\colon Op_1)$
فرض	۵, $\vdash (k_i\colon Op_1)$
سطر ۳ و ۵ و (CM)	۶, $(k_i\colon Op_1) \vdash (k_i\colon Op_1) \rightarrow D_S(Op_1)$
سطر ۴ و ۶ و And	۷, $(k_i\colon Op_1) \vdash (k_i\colon Op_1) \wedge (k_i\colon Op_1) \rightarrow D_S(Op_1)$
سطر ۷ و RW	۸, $(k_i\colon Op_1) \vdash D_S(Op_1)$

مثال ۳-۳. مهم‌ترین تفاوت بین امارات و اصول عملیه در اصول فقه این است که اگر گزاره‌ای از یک اماره نتیجه شود، مُثبَتاتِ آن (لوازم عقلی یا به تعبیر دیگر پیامدهای علی-منطقی آن) نیز نتیجه می‌شود. اما اگر همان گزاره از اصول عملیه حاصل شود، فقط مجاز به استنتاج لوازم شرعی آن هستیم.

فرض کنید یک دلیل (مثلِ قاعده‌ی ید[۱۶]) بنا بر برخی مبانیِ فقهی، اماره و بر اساس برخی مبانیِ دیگر، اصل عملی باشد [۶] در ادامه نشان می‌دهیم صوری‌سازی ما قادر به نشان‌دادنِ این تفاوت است.

مبنای اول: ید را اماره بر ملکیت در نظر بگیریم.

[۱۶] قاعده ید: چیزی که در دست کسی است (در تصرف اوست) مال او به شمار می‌رود. نگاه کنید به [۶].

بدین ترتیب اگر شاهد «کتاب در دست علی است» را با t نمایش دهیم و «علی مالک کتاب است» را با φ نمایش دهیم، گزاره‌ی ما به شکلِ $\vdash (t{:}\varphi)$ فرمال‌سازی می شود که با توجه به اصل موضوع P1 می‌توانیم $\vdash \varphi$ را نتیجه بگیریم و تمام نتایج منطقی φ نیز برقرار خواهد بود (بنا بر RW).

مبنای دوم: به عنوان یک اصل عملی، ید را به منزله‌ی ملکیت تلقی کنیم.

در این حالت فرضِ ما به شکل $\vdash (k{:}\varphi)$ فرموله می‌شود و با توجه به اصل موضوع $\vdash (k{:}\varphi) \Rightarrow_s \varphi$ از آن‌جا که $\Rightarrow_s$ در اصل‌موضوعه‌ی RCM صدق نمی‌کند، نتایج منطقی φ را لزوما نمی‌توانیم داشته باشیم. و فقط نتایج شرعی φ را می‌توانیم استنتاج کنیم.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش توانستیم با وام‌گیری دو عمل‌گر شرطی غیرکلاسیک $\Rightarrow_s$ و $\vdash$ از منطق‌های جدید، و استفاده از زبان منطق توجیه، به یک صوری‌سازی از مراتب حجیت شرعی (اطمینان، اماره، اصل عملی) دست یابیم، که این مراتب را تفکیک می‌کند و خصوصیات منطقی خاص هریک رابه طور صحیح، اعمال می‌نماید.

فهرست منابع

[۱] Artemov, Sergei, & Fitting, Melvin. (2019). *Justification logic: Reasoning with reasons* (Vol. 216). Cambridge University Press .

[۲] Grossi, Davide, & Jones, Andrew. (2013). Constitutive Norms and Counts-as Conditionals. In D. Gabbay, J. H. null, R. van der Meyden, X. Parent, & L. van der Torre (Eds.), *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems* (Vol. 1, pp. 407-441). College Publications, London .

[۳] Jones, Andrew, & Sergot, Marek. (1996). A Formal Characterisation of Institutionalised Power. *Logic Journal of the IGPL*, *4*(3), 427-443. https://doi.org/10.1093/jigpal/4.3.427

[۴] Kraus, Sarit, Lehmann, Daniel, & Magidor, Menachem. (1990). Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, *44*(1), 167-207. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0004-3702(90)90101-5

[۵] Strasser, Christian, & Antonelli, G. Aldo. (2019). Non-monotonic Logic. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-nonmonotonic/

[۶] بجنوردی، حسن. (۱۳۷۷). القواعد الفقهیة. نشر الهادی.

[۷] صدر، محمدباقر. (۱۴۱۸ق). دروس فی علم الأصول. موسسة النشر الإسلامی.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

رویکرد تحلیلی منطقدانان قدیم به مباحث

سید محمدعلی حجتی
دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
hojatima@modares.ac.ir

چکیده: اگر رویکرد تحلیلی را عبارت بدانیم از اینکه در یک بحث اولاً همه مفاهیمی که به کار گرفته می‌شود مشخص بوده و حتی المقدور از ابهام یا ایهام به دور باشند و ثانیاً مباحث در چارچوب منطق و ضوابط آن پیش رود در این صورت می توان گفت همه یا اکثر فلاسفه و منطقدانان قدیم (ارسطویی یا سنتی) رویکردی تحلیلی بخصوص به مباحث منطقی داشته‌اند. مثلاً در تعریف قیاس ملاحظه می‌کنیم سعی دارند مشخص کنند که هر کلمه‌ای که به کار می‌رود قرار است چه توضیحی ارائه دهد و از چه نکاتی احتراز کند. به عنوان مثالی دیگر در بحث از موجبه معدوله المحمول تحلیل از بحث شأنیت و اشاره به تقابل عدم و ملکه از جانب ابن‌سینا را ملاحظه می‌کنیم و ایرادی که مطرح می‌کند. سپس نقدی که خونجی به ایراد ابن‌سینا دارد و سپس داوری و قضاوتی که ارموی و قطب رازی در این خصوص دارند، همگی این مباحث در چارچوب ضوابط منطقی و با رویکردی تحلیلی انجام می‌شود. گاه در این میان ایده‌های تازه‌ای نیز مطرح می‌شود که سابقه در منطق ارسطو نداشته است، مانند قضیه موجبه سالبه المحمول. از طرف دیگر، بسیاری از مباحثی که مطرح می شده است با توجه به ادبیات معاصر می‌توان گفت از مباحث فلسفه منطق و فلسفه زبان است و البته بدون اینکه در این میان تفکیکی از جانب منطقدانان قدیم صورت گرفته باشد؛ ولی بهر حال مطالبی که مطرح کرده‌اند در این چارچوب‌ها می‌گنجد و به نظر می‌رسد یکی از رویکردهایی که امروزه مناسب است اتخاذ شود بررسی آراء و عقاید گذشتگان معطوف به مباحث فلسفه منطق و فلسفه زبان و البته همراه با مقایسه با آراء جدید در این زمینه است.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۵:۴۰ (به وقت محلی تهران)
۱۲:۱۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

گسترشی از منطق اثبات‌ها با عمل‌ها

فاطمه مجلسی کوپائی[۱]، مقداد قاری[۲]

۱. دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

fatemeh.majlesi.30@gmail.com

۲. دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران و پژوهشگاه دانش‌های بنیادی شعبه اصفهان، اصفهان، ایران

m.ghari@Itr.ui.ac.ir

چکیده: در این مقاله قصد داریم تأثیر افزودن عمل‌ها به منطق‌های توجیه را بررسی کنیم. به ویژه به مطالعه منطق اثبات‌ها که توسط آرتموف معرفی شده است، می‌پردازیم و زبان این منطق را توسط عمل‌ها گسترش می‌دهیم. برای این کار از منطق پویای گزاره‌ای استفاده می‌کنیم. پس از معرفی یک دستگاه اصل موضوعی و یک معناشناسی براساس مدل‌های کریپکی- فیتینگ برای این منطق ترکیبی، قضیه تمامیت را با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: منطق توجیه، منطق پویای گزاره‌ای، مدل‌های کریپکی-فیتینگ، قضیه تمامیت، مدل‌های کانونی

مقدمه

منطق توجیه۱ منطقی برای استدلال درباره اثبات‌های ریاضی و توجیه‌های معرفتی فراهم می‌کند. اولین منطق توجیهی که معرفی شده است، منطقی به نام منطق اثبات‌ها۲ LP می‌باشد که توسط آرتموف در [۱], [۲] ارائه شده است. منطق‌های توجیه گسترشی از منطق گزاره‌ها یا محمول‌ها هستند که با افزودن عبارت‌هایی به صورت $t{:}\,\varphi$ به دست می‌آیند، که در آن φ یک فرمول و t یک ترم توجیه می‌باشد. منطق‌های توجیه را می‌توان به عنوان منطق معرفتی (منطق دانش یا منطق باور) در نظر گرفت، که در این حالت عبارت $t{:}\,\varphi$ را می‌توان به صورت «t یک توجیه (یا دلیل یا شاهد) برای معرفت به اینکه φ صادق است» تعبیر کرد. برای برخی از منطق‌های توجیه قضیه تمامیت حسابی قابل‌اثبات است و در این منطق‌ها عبارت $t{:}\,\varphi$ را می‌توان به صورت «t یک اثبات برای φ است» تعبیر کرد.

منطق پویای گزاره‌ای۳ PDL یکی از انواع منطق‌هایی است که می‌توان در آن عمل‌ها۴ را به عنوان اشیایی زبانی معرفی کرد. در منطق پویای گزاره‌ای عمل‌ها با ساختاری شبیه به برنامه‌های منظم کامپیوتری۵ ساخته می‌شوند. منطق

1 Justification Logic
2 Logic of Proofs
3 propositional dynamic logic
4 actions
5 regular programs

سالن ۳۱۳

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۵:۴۰ (به وقت محلی تهران)
۱۲:۱۰ (به وقت گرینویچ)

PDL شامل فرمول‌هایی به صورت $[\alpha]\varphi$ است که در آن α یک عمل است. این فرمول به این صورت خوانده می‌شود: بعد از انجام هر عمل α فرمول φ صادق است. دوگان این فرمول به صورت $\langle\alpha\rangle\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg[\alpha]\neg\varphi$ تعریف می‌شود و به این صورت خوانده می‌شود: «اجرای خاتمه‌پذیری از عمل α موجود است که پس از آن اجرا فرمول φ صادق است». معناشناسی این منطق بر اساس مدل‌های کریپکی است که در آن به هر عمل یک رابطه دسترس‌پذیری نظیر می‌شود. این رابطه دوتایی وضعیت‌های ورودی (وضعیت جهان قبل از انجام عمل) و خروجی (وضعیت جهان بعد از انجام عمل) را تعیین می‌کنند.

در این مقاله قصد داریم تأثیر افزودن عمل‌ها به منطق اثبات‌ها را بررسی کنیم. ابتدا زبان منطق اثبات‌ها را توسط عمل‌های موجود در منطق PDL گسترش می‌دهیم. البته در این مقاله برای سادگی از عملگر تکرار [1] که در منطق PDL نقش مهمی بازی می‌کند، صرف‌نظر می‌کنیم. نام این منطق ترکیبی را DLP می‌گذاریم. پس از معرفی یک دستگاه اصل موضوعی و یک معناشناسی براساس مدل‌های کریپکی- فیتینگ برای DLP، قضیه تمامیت را با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات می‌کنیم.

ساختار نحوی منطق پویای توجیه

در این بخش ابتدا زبان منطق DLP را معرفی کرده و سپس یک دستگاه اصل موضوعی برای آن ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲. ۱: زبان صوری

زبان منطق DLP توسط گرامر زیر ساخته می‌شود:

$$t ::= x \in Var \mid c \in Cons \mid t.t \mid t + t \mid !t$$

$$\alpha ::= a \in At \mid \alpha;\beta \mid \alpha \cup \beta \mid \varphi?$$

$$\varphi ::= p \in Prop \mid 0 \mid \neg\varphi \mid \varphi(\rightarrow,\vee,\wedge,\equiv)\varphi \mid [\alpha]\varphi \mid t{:}\,\varphi$$

که در آن Var، Cons، At و Prop به ترتیب مجموعه‌های شمارای نامتناهی از متغیرهای توجیه، ثابت‌های توجیه، عمل‌های اتمی و متغیرهای گزاره‌ای هستند. گزاره اتمی 0 نیز نشان‌دهنده تناقض است.

تعریف ۲. ۲: منطق DLP علاوه بر اصول منطق گزاره‌ها شامل اصول زیر است:

1. $[\alpha](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ([\alpha]\varphi \rightarrow [\alpha]\psi)$
2. $[\alpha](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\alpha]\psi$
3. $[\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi$
4. $[\alpha;\beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi$

1 iteration

5. $[\psi?]\varphi \leftrightarrow \psi \rightarrow \varphi$
6. $s{:}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (t{:}\varphi \rightarrow (s.t)\psi)$
7. $s{:}\varphi \rightarrow (s+t)\varphi$
8. $t{:}\varphi \rightarrow !t{:}(t{:}\varphi)$
9. $t{:}\varphi \rightarrow \varphi$

و دو قاعده وضع مقدم و قاعده ضرورت:

$$MP{:}\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$NEC{:}\frac{\varphi}{[\alpha]\varphi}$$

تعریف ۲. ۳: (تخصیص ثابت۱)یک مجموعه تخصیص ثابت CS برای منطق DLP، شامل فرمول‌هایی به صورت $c : \varphi$ است که در آن c یک نماد ثابت توجیه و φ نمونه‌ای از اصول بالا است. منطق DLP_{CS} همان منطق DLP است که در آن مجموعه فرمول‌های CS به عنوان اصل به آن اضافه شده‌اند.

ساختار معنایی

در این بخش به معرفی معناشناسی منطق DLP می‌پردازیم. معناشناسی این منطق ترکیبی است از معناشناسی مدل‌های کریپکی منطق پویای گزاره‌ای (رجوع کنید به [۳]) و ترکیبی است از مدل‌های فیتینگ منطق اثبات‌ها می‌باشد (برای مدل‌های فیتینگ رجوع کنید به [۴]).

تعریف ۳. ۱: مدل کریپکی- فیتینگ $M =< K, m_{\mathfrak{R}}, R, \mathcal{E} >$ یک چند تایی است که:

K یک مجموعه غیرتهی از وضعیت‌ها۲ است. $m_{\mathfrak{R}}$ یک تابع معنا۳ است که به هر فرمول یک زیرمجموعه از K را و به هر برنامه یک رابطه دوتایی روی K نسبت می‌دهد، $\mathcal{E}$ که هر دوتایی ترم و فرمول را به یک وضعیت در K نسبت می‌دهد و R یک رابطه دوتایی روی وضعیت‌هاست:

$$m_{\mathfrak{R}}(\varphi) \subseteq K$$

$$m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \subseteq K \times K$$

$$\mathcal{E}(t,\varphi) \subseteq K$$

1 Constant Specification
2 states
3 meaning function

$R(\mathrm{u}) = \{v \in K | vRu\}$

که تابع $\mathcal{E}$ در شرایط زیر برقرار است:

1. If $\mathrm{c}\colon \varphi \in \mathrm{CS}$, then $\mathrm{w} \in \mathcal{E}(\mathrm{c}, \varphi)$
2. if uRv and $\mathrm{u} \in \mathcal{E}(\mathrm{t}, \varphi)$ *then* $\mathrm{v} \in \mathcal{E}(\mathrm{t}, \varphi)$
3. if $\mathrm{u} \in \mathcal{E}(\mathrm{t}, \varphi)$ *then* $\mathrm{u} \in \mathcal{E}(!\mathrm{t}, \mathrm{t}\colon \varphi)$
4. $\mathcal{E}(\mathrm{s}, \varphi \rightarrow \psi) \cap \mathcal{E}(\mathrm{t}, \varphi) \subseteq \mathcal{E}(\mathrm{s}.\mathrm{t}, \psi)$
5. $\mathcal{E}(\mathrm{s}, \varphi) \cup \mathcal{E}(\mathrm{t}, \varphi) \subseteq \mathcal{E}(\mathrm{s} + \mathrm{t}, \varphi)$

تعریف ۳. ۲: قواعد معناشناسی

I. $m_{\mathfrak{R}}(\varphi \rightarrow \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (K - m_{\mathfrak{R}}(\varphi)) \cup m_{\mathfrak{R}}(\psi)$
II. $m_{\mathfrak{R}}([\alpha]\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} K - (m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \circ (K - m_{\mathfrak{R}}(\varphi)) = \{u | \forall v \; if \; (u, v) \in m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \text{ then } v \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$
III. $m_{\mathfrak{R}}(\alpha; \beta) \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \circ m_{\mathfrak{R}}(\beta) = \{(u, v) | \exists w \in K \; (u, w) \in m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \text{ and } (w, v) \in m_{\mathfrak{R}}(\beta)\}$
IV. $m_{\mathfrak{R}}(\alpha \cup \beta) \stackrel{\text{def}}{=} m_{\mathfrak{R}}(\alpha) \cup m_{\mathfrak{R}}(\beta)$
V. $m_{\mathfrak{R}}(\varphi ?) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, u) | u \in m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$
VI. $m_{\mathfrak{R}}(\mathrm{t}\colon \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}(t, \varphi) \cap \{u | R(\mathrm{u}) \subseteq m_{\mathfrak{R}}(\varphi)\}$

تعریف ۳. ۳: اعتبار

فرمولی مانند φ در منطق $\mathrm{DLP_{CS}}$ معتبر است به این معنا که در هر مدل M و هر وضعیت u در M، u در $m_{\mathfrak{R}}(\varphi)$ باشد. فرمولی مانند φ با فرضیات Σ در منطق $\mathrm{DLP_{CS}}$ معتبر است به این معنا که در هر مدل M و هر وضعیت u در M، اگر برای هر $\psi \in \Sigma$، u در $m_{\mathfrak{R}}(\psi)$ باشد، آنگاه u در $m_{\mathfrak{R}}(\varphi)$ باشد.

تمامیت

در این بخش قضیه سلامت[1] و تمامیت[2] را با استفاده از مدل‌های کانونی ثابت می‌کنیم.

تعریف ۴. ۱: مدل کانونی

مدل کانونی $\mathrm{M}^{\mathfrak{R}} = < N, m_{\mathfrak{R}}, \mathrm{R}_{\mathfrak{R}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{R}} >$ برای منطق $\mathrm{DLP_{CS}}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

N یک مجموعه از تمام مجموعه‌های $\mathrm{DLP_{CS}}$- سازگار ماکزیمال از فرمول‌هاست.

1 soundness
2 completeness

$$\mathrm{R}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{u},\mathrm{v})\ iff\ \mathrm{u}^{\#}=\{\varphi|\mathrm{t}:\varphi\in\mathrm{u}\ for\ some\ t\}\subseteq\mathrm{v}$$

$$m_{\mathfrak{N}}(\varphi)\ \stackrel{\text{def}}{=}\{u|\varphi\in u\}$$

$$m_{\mathfrak{N}}(\alpha)\ \stackrel{\text{def}}{=}\{(u,v)|(\forall\varphi)\ if\ \varphi\in v\ \text{then}\ \langle\alpha\rangle\varphi\in u\}$$
$$=\{(u,v)|(\forall\varphi)\ if\ [\alpha]\varphi\ \in u\ \text{then}\ \varphi\in v\}$$

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t},\varphi)\stackrel{\text{def}}{=}\{\mathrm{u}|\mathrm{t}:\varphi\in\mathrm{u}\}$$

لم ۴. ۲: مدل کانونی $\mathrm{M}^{\mathfrak{N}}=< N,m_{\mathfrak{N}},\mathrm{R}_{\mathfrak{N}},\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}>$ یک مدل برای منطق $\mathrm{DLP_{CS}}$ است.

اثبات: ابتدا باید نشان دهیم $\mathrm{R}_{\mathfrak{N}}$ متعدی و انعکاسی است. اثبات مشابه با اثباتی است که در [۴] بیان شده است. بنابراین جزییات آن در اینجا حذف می‌شود. حال نشان می‌دهیم $\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}$ در شروط ۱-۵ از تعریف ۳.۱ صدق می‌کنند. چون اثبات مشابه با اثباتی است که در [۴] بیان شده است فقط یک شرط برای نمونه در اینجا بررسی می‌شود.

$$\text{if } \mathrm{uR}_{\mathfrak{N}}\mathrm{v} \text{ and } \mathrm{u}\in\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t},\varphi)\ then\ \ \mathrm{v}\in\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t},\varphi)$$

طبق تعریف چون $\mathrm{uR}_{\mathfrak{N}}\mathrm{v}$ آنگاه $\mathrm{u}^{\#}\subseteq\mathrm{v}$ و چون $\mathrm{u}\in\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t},\varphi)$ پس $\mathrm{t}:\varphi\in\mathrm{u}$. از طرفی طبق اصول داریم: $t:\varphi\to\,!\mathrm{t}:(\mathrm{t}:\varphi)$ و چون u مجموعه ماکسیمال ماکزیمال است، پس $!\mathrm{t}:(\mathrm{t}:\varphi)\in\mathrm{u}$ و طبق تعریف این یعنی $\mathrm{t}:\varphi\in\mathrm{u}^{\#}$ و این نتیجه می‌دهد که $\mathrm{t}:\varphi\in\mathrm{v}$. پس $\mathrm{v}\in\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t},\varphi)$.

لم ۴. ۳: در مدل کانونی $\mathbf{M}^{\mathfrak{N}}$ داریم:

i. $m_{\mathfrak{N}}(\varphi\to\psi)\ =(N-m_{\mathfrak{N}}(\varphi))\cup m_{\mathfrak{N}}(\psi)$
ii. $m_{\mathfrak{N}}([\alpha]\varphi)\ =N-(m_{\mathfrak{N}}(\alpha)\circ(N-m_{\mathfrak{N}}(\varphi))$
iii. $m_{\mathfrak{N}}(\alpha;\beta)\ =m_{\mathfrak{N}}(\alpha)\circ m_{\mathfrak{N}}(\beta)$
iv. $m_{\mathfrak{N}}(\alpha\cup\beta)\ =m_{\mathfrak{N}}(\alpha)\cup m_{\mathfrak{N}}(\beta)$
v. $m_{\mathfrak{N}}(\varphi?)\ =\{(u,u)|u\in m_{\mathfrak{N}}(\varphi)\}$
vi. $m_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t}:\varphi)\ =\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)\cap\{u|(\forall v)\ if\ (u,v)\in R_{\mathfrak{N}}\ \text{then}\ v\in m_{\mathfrak{N}}(\varphi)\}$

برهان. اثبات بندهای $\mathrm{i}-\mathrm{v}$ را می‌توان در کتاب [۳] یافت. در اینجا فقط بند vi اثبات می‌شود.

اگر $u\in m_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t}:\varphi)$ آنگاه طبق تعریف $\mathrm{t}:\varphi\in u$ و با توجه به تعریف $\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}$،$u\in\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)$. حال اگر vای را در نظر بگیریم که $u\mathrm{R}_{\mathfrak{N}}v$، طبق تعریف $\mathrm{R}_{\mathfrak{N}}$، چون $\mathrm{t}:\varphi\in u$ پس $\varphi\in v$ که همان $v\in m_{\mathfrak{N}}(\varphi)$ است. اگر

$$u\in\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}(t,\varphi)\cap\{u|(\forall v)\ if\ (u,v)\in\mathrm{R}_{\mathfrak{N}}\ \text{then}\ v\in m_{\mathfrak{N}}(\varphi)\}=\{u\in N|t:\varphi\in u\}$$

طبق تعریف $\mathcal{E}_{\mathfrak{N}}$، $u\in\{\Gamma|\mathrm{t}:\varphi\in\Gamma\}$. پس $t:\varphi\in u$ و طبق تعریف: $u\in m_{\mathfrak{N}}(\mathrm{t}:\varphi)$.

قضیه ۴.۴: تمامیت. فرمول F در $\mathrm{DLP_{CS}}$ اثبات پذیر است اگر و تنها اگر F در $\mathrm{DLP_{CS}}$ معتبر باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم F در $\mathrm{DLP}_{\mathrm{CS}}$ اثبات پذیر است. پس مجموعه $\{\neg F\}$ سازگار است. و طبق قضیه لیندبائم این مجموعه قابل گسترش به یک مجموعه سازگار ماکزیمال Γ است. چون $\neg F$ در Γ است. طبق تعریف داریم: $\Gamma \in m_{\mathfrak{R}}(\neg F)$ که طبق تعریف ما از اعتبار به این معنی است که تحت Γ، $\neg F$ در این منطق معتبر است و این با فرض ما در تناقض است. پس تمامیت اثبات می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله منطقی به نام DLP ارائه کردیم که ترکیبی از منطق اثبات‌ها و منطق پویای گزاره‌ای است. پس از معرفی یک دستگاه اصل موضوعی و یک معناشناسی براساس مدل‌های کریپکی- فیتینگ برای DLP، قضیه تمامیت را با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات کردیم. در گام بعدی قصد داریم زبان منطق DLP را توسط عملگر تکرار که در منطق PDL نقش مهمی بازی می‌کند گسترش دهیم و قضیه تمامیت را برای آن منطق جدید ثابت کنیم. همچنین قصد داریم عملگرهای منطق تکلیف از جمله باید، مجاز و ممنوع را در منطق DLP تعریف کرده و به بررسی پارادوکس‌های منطق تکلیف در آن بپردازیم.

فهرست منابع

[1] S. Artemov, “Operational modal logic,” Dec. 1995.

[2] S. Artemov, “Explicit Provability and Constructive Semantics,” *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 7, no. 1, pp. 1–36, Mar. 2001.

[3] D. Harel, D. Kozen, and Jerzy. Tiuryn, *Dynamic logic*. MIT Press, 2000.

[4] M. Fitting, “The logic of proofs, semantically,” *Ann Pure Appl Log*, vol. 132, no. 1, pp. 1–25, Feb. 2005, doi: 10.1016/j.apal.2004.04.009.

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

EI for RCV F Using Johnson's Method

Mohammad Maarefi

IUSS Pavia

md.maarefi@gmail.com

Abstract: Elimination of imaginaries for real closed valued fields down to geometric sorts was first proved by Tim Mellor in [Mel06]. The main strategy in [Mel06] is to move to the algebraic closure and quote the methods developed in [HHM06]. Hence, as the main proof in [HHM06] is "inaccessible", Mellor's proof appears to be hard to understand as well. Will Johnson in [Joh20], finds a shorter as well as a more "conceptual" proof for the elimination of imaginaries in algebraically closed valued f ields (referred to as ACV F) using an abstract criterion for elimination of imaginaries from [Hru14]. In this chapter, I reprove the elimination of imaginaries for real closed valued f ields (referred to as RCV F) with Johnson's method from [Joh20]. So, I prove nothing new here. To be clear, we make use of the pieces of machinery developed in [Mel06] as well as in [Joh20] on many occasions.

2 Elimination of Imaginaries in $RCVF$

In this section, we prove the elimination of imaginaries for $RCVF$ down to the geometric sorts. This is a known fact proved by Mellor [Mel06]. Mellor relies on the fact that $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ and on the proof of the elimination of imaginaries for $ACVF$ proved by Haskell, Hrushovski, and Macpherson in [HHM06]. I reprove Mellor's result using Theorem 3.1 of [Joh20]. Let's refresh our memory with the criterion which is a sufficient (and not a necessary) condition for elimination of imaginaries for a theory T:

Theorem 2.1. *Let T be a theory with $R \models T$ the home sort, and let $\mathcal{G}$ be a collection of sorts, then T has elimination of imaginaries if the following conditions hold:*

- *For every non-empty, R-definable set $X \subset R$, there is an $acl^{eq}(\ulcorner X \urcorner)$-definable type in X.*
- *Every definable type in R^n has a code in $\mathcal{G}$ (possibly infinite).*
- *Every finite set of finite tuples in $\mathcal{G}$ has a code in $\mathcal{G}$.*

Proof. Theorem 4.1 of [Joh20]. □

The rest of this section is to verify each item in a subsection. So for the rest of the section, let T be $RCVF$. Furthermore, as the Johnson-geometric sorts are coded in HHM-geometric sorts, I'll first verify the first two items using the Johnson-geometric sorts, and I'll verify the last item using HHM-geometric sorts.

2.2 Definable Types for Definable Sets

We first show that for each $\mathcal{R}$-definable set $X \subset \mathcal{R}$ (i.e. $\mathcal{R}$-definable sets in one variable), there is a $acl^{eq}(\ulcorner X \urcorner)$-definable type in X. So, the target is Theorem 2.2.1. To do that we use quantifier elimination for $RCVF$ in the one-sorted language, and the decomposition result proved by Holly [Hol95]. We also, use the fact that the value group is densely ordered and the residue field is real closed. The ball cuts are convex definable sets and if that the original definable set is non-empty, at least one of the disjuncts should be non-empty. So we have:

Lemma 2.2.1. *Let $D \subset \mathcal{R}$, be a definable set, then there is an $acl^{eq}(\ulcorner D \urcorner)$-definable type in D.*

Proof. Let $D \subset R^1$ be a $\mathcal{R}$-definable set, then by **??**, there are balls $(B_1, B_2, ..., B_n)$ such that D is equivalent to:

$$(\overline{B_1^{\circ_1}} \cap B_2^{\circ_2}) \cup (\overline{B_3^{\circ_3}} \cap B_4^{\circ_4}) .... \cup (\overline{B_{n-1}^{\circ_{n-1}}} \cap B_n^{\circ_n}) \ (*)$$

i.e. D is a finite union of set difference between ball cuts. But if $D \neq \emptyset$, then at least one of the disjuncts in $(*)$ is non empty (call it C). Ball cuts are convex and convex sets are closed under intersection. Now take the p_C^- the left generic type of C which is definable over $\ulcorner D \urcorner$ as C is $\ulcorner D \urcorner$-definable. So, for a definable set D, we have a $acl^{eq}(\ulcorner D \urcorner)$-definable type i.e. p_C^-. □

2.3 Coding the Definable 1-Types

In this subsection, we show that for any C-definable 1-type p, where $C \subset \mathbb{M}$ is smaller than the saturation of the monster, p has a code in the geometric sorts (possibly infinite). Following quantifier elimination for $RCVF$, p is a collection of formulas that are equivalent to a Boolean combination of formulas of the form $p(x) = q(x)$, $p(x)|q(x)$, and $p(x) < q(x)$. Hence, the task of finding a code for p in the geometric sorts reduces to find a code for

- The subspaces of $\mathcal{R}^n[\overline{X}]/I$, for an ideal I.
- Definable ways for turning vector spaces into valued vector spaces.
- The order structure for the field $\mathcal{R}$.

We make this more precise. First, for the subspaces of $\mathcal{R}^n$, we have the following general lemma (Note that in the statement $\mathcal{R}$ represents any field. I used $\mathcal{R}$ instead of K in the Johnson's paper, in order to be consistent with the rest of the current manuscript):

Lemma 2.3.1 (Lemma 4.3. in [Joh20]). *Let $\mathcal{R}$ be any field, and $V \subset \mathcal{R}^n$ a sub-space, then V is coded by a tuple in $\mathcal{R}$. Moreover, V has $\ulcorner V \urcorner$-definable bases.*

Proof. Let V be a m-dimensional subspace of $\mathcal{R}^n$ and let $\pi : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ be some coordinate projection, then $\pi|_V : V \to \mathcal{R}^m$ is an isomorphism (as a $\mathcal{R}$-vector space, V is isomorphic to $\mathcal{R}^m$). Now consider $\pi^{-1}(e_1, e_2, ..., e_m)$, where e_is form the standard basis is a basis for V. Moreover, $\pi^{-1}(e_1, e_2, ..., e_m)$ is $\ulcorner V \urcorner$-definable. □

The Lemma 2.3.1, is used to code the sub-spaces of $\mathcal{R}^n$. Now we need to find codes for valued vector spaces:

Definition 2.3.1. Let V be a $\mathcal{R}$-vector space. A VVS structure on V is a binary relation r such that there is a valued $\mathcal{R}$-vector space structure on V such that $r(x, y) \leftrightarrow v(x) \leq v(y)$.

But for a field $\mathcal{R}$, the VVS structure on subspaces of $\mathcal{R}^n$ are definable ways to turn a vector space into a valued vector space. As the original proof of Johnson [Joh20] only uses vector spaces (and not the condition that $\mathcal{R}$ is algebraically closed), his proof applies to our case as well.

Theorem 2.3.2. *Let τ be a code for a VVS structure on $\mathcal{R}^m$, then τ is interdefinable with some code in the geometric sorts.*

Proof. See [Joh20], Theorem 5.3. □

We have the following similar theorem to Theorem 5.5 of [Joh20]:

Theorem 2.3.3. *Let $p(\bar{x})$ be a definable type in $\mathcal{R}^n$, then $p(\bar{x})$ has a code in Johnson-geometric sorts (i.e. $R_{n,l}s$).*

Proof. Let p be a complete C-definable type in $\mathcal{R}^n$. Following the quantifier elimination for $RCVF$ in the language $\{0, 1, +, -, \times, <, |\}$ (i.e. the one-sorted language for real closed valued fields), we have that every formula in p is a finite Boolean combination of the following items:

- $p_1(\bar{x}, \bar{c}) = 0$.
- $p_1(\bar{x}, \bar{c}) | p_2(\bar{x}, \bar{c})$.
- $p_1(\bar{x}, \bar{c}) < 0$.

for some $\bar{c} \in C^n$. Again, following the quantifier elimination in one-sorted language, the type p is determined by the following data:

- A unique ideal containing all of the $Q(\bar{X}) \in \mathcal{R}[\bar{X}]$ such that $Q(\bar{x}) = 0$ is in $p(\bar{x})$.
- A valued $\mathcal{R}$-vector space structure on $\mathcal{R}[\bar{X}]/I$ where I is the unique ideal in the previous item.
- A set containing all of $Q(\bar{X}) \in \mathcal{R}[\bar{X}]$ such that $Q(\bar{x}) < 0$ is in $p(\bar{x})$ which picks up the order uniquely.

To capture all of the items, we follow Johnson's method in [Joh20]. For each $d < \omega$, consider the following set of data (let V_d be the set of all polynomials in $\mathcal{R}[\bar{X}]$ of degree $\leq d$):

- Let I_d be the set of all $Q(\bar{X}) \in V_d$, such that $Q(\bar{x}) = 0$ is in $p(\bar{x})$.
- Let $\mathcal{R}_d$ be the set of all $Q_1(\bar{X}) \times Q_2(\bar{X}) \in V_d \times V_d$ such that $Q_1(\bar{x}) | Q_2(\bar{x})$ is in $p(\bar{x})$.
- Let O_d be the set of all $Q(\bar{X}) \in V_d$ such that $Q(\bar{x}) < 0$ is in $p(\bar{x})$.

Note that the third item is supposed to capture the unique order structure in K. First item is coded by Lemma 2.3.1, the second is Theorem 2.3.2. The only bit of information missing here is the third one.

Let $Q(\bar{x}, \bar{c}) < 0$ in $p(\bar{x})$. Let $D = \{\bar{c} : Q(\bar{x}, \bar{c}) < 0\}$ and define the following equivalence relation:

$$\bar{c} \sim \bar{d} \text{ if and only if } \forall \bar{x}(Q(\bar{x}, \bar{c}) < 0 \leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{d}) < 0).$$

Let $[\bar{c}]$ to be the equivalence class of $\bar{c}$ under the above-mentioned equivalence relation. By the elimination of imaginaries for RCF, we have that there is a code for $[\bar{c}]$ in the home sort. Call this element c_1 and let $\ulcorner O_d \urcorner$ be all of c_is for each $Q(\bar{x}, \bar{y})$. Now take $\bigcup_{d<\omega} \ulcorner I_d \urcorner \cup \ulcorner \mathcal{R}_d \urcorner \cup \ulcorner O_d \urcorner$ as the code for the $p(\bar{x})$. □

2.4 Coding Finite Sets

Finally, we need to code any finite set of finite imaginaries in the $\mathcal{G}$ i.e. to show that finite tuples from $\mathcal{G}$ are coded in $\mathcal{G}$ itself. Here is an attempt to code the finite set of finite tuples of $\mathcal{G}$ using *unary sets* and Proposition 2.3.10 of [HHM06]. We review preliminaries on unary sets from [HHM06] and [HHM08]. The main idea in this subsection is to use the canonical ordering on the main sort to define an ordering on the unary sets.

As a remark note that in the main sort (the ordered valued field) $\mathcal{R}$ (as well as in the $ACVF$ case), every one-dimensional definable set is a finite union of balls, which results in a notion of independence. The motivating idea for unary sets is to develop a similar notion of independence in the S_n, T_n sorts.

First, recall that a *torsor* U of a $\mathcal{O}$-module A is a coset of A. Equivalently, U is a set with a transitive action of A on U. A *subtorsor* of U is a set of the form $u+B$ where B is an $\mathcal{O}$-submodule of A. Call an $\mathcal{O}$-submodule a *definable* 1-*module* in $\mathcal{R}^{eq}$ if it is definably isomorphic to $A/\gamma B$, where A is $\mathcal{O}, \mathfrak{m}$ or $\mathcal{R}$ and B is $\mathcal{O}$ or $\mathfrak{m}$ with $0 \leq \gamma \leq 1$.

Call a set equipped with a definable transitive action of an definable 1-module, a *definable* 1-*torsor*. Note that definable 1-torsors are cosets of definable 1-modules. Moreover, if the 1-torsor is defined with parameters from C, call it a *definable* $C-1-$*torsor*. Finally, here is the definition for a C-unary set:

Definition 2.4.1. A C-*unary set* is a $C-1-$torsor or an interval $[0,\alpha)$ in $\Gamma \cup \{\infty\}$. Moreover, a *unary type* is the type of an element in an unary set.

Note that any closed ball containing 0 is definably isomorphic to $\mathcal{O}$ and hence, is a unary set. Furthermore, $\mathcal{R} = \mathcal{R}/0.\mathcal{O}$ is a unary set. In Proposition 2.3.10 of [HHM06], we see the connection between the unary sets and the geometric sorts. Call a sequence $(a_1, a_2, ..., a_n)$ of elements from $\mathcal{G}$ a *unary code* if each a_i is an element of an unary set defined over $dcl(a_j : j < i)$.

Recall that a Swiss cheese is a non-empty set of the form $B \setminus (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n)$. For a unary set U, define a Swiss cheese to be a non-empty set $t \setminus (t_1 \cup t_2 \cup ... \cup t_n)$, where t, t_is are definable subtorsors of U. Lemma 2.3.3 in [HHM06], shows that there is a unique decomposition result for the unary sets.

Lemma 2.4.2. *Let U be a $C-1-$torsor, $C \subset \mathcal{R}^{eq}$ and X a definable subset of U, then X is a unique finite union of Swiss cheeses.*

Proof. Follows from Theorem 2.1.2 of [HHM06]. □

Moreover, there is a notion of generic element as well as a generic type for unary sets:

Definition 2.4.3. Let C be a set of parameters and U an $acl(C)$-unary set and $a \in U$. Say a is *generic* in U over C if a lies in no $acl(C)$-unary proper subset of U.

Let U be a C-definable unary set, and $a, b \in U$. From the uniqueness result of 2.4.2, if a, b lie in no C-definable proper subtorsors of U, then $a \equiv_C b$ (see Lemma 2.3.3, (ii)). This plays a crucial role for coding finite sets of finite tuples from $\mathcal{G}$ in $\mathcal{G}$. First, let us pin down the notion of a *unary code* (Definition 2.3.10 of [HHM06]):

Definition 2.4.4. Let e be an imaginary, then $(a_1, ..., a_n)$, a sequence of imaginaries (all in $\mathcal{R}^{eq}$), is a *unary code* for e if $dcl(e) = dcl(a_1, ..., a_n)$ and each a_i is an element of a unary set defined over $dcl(a_j : j < i)$ for all i.

Finally, we have the following result:

Fact 2.4.5. *Let $\mathcal{G}$ be the collection of geometric sorts defined earlier, then for each $s \in \mathcal{G}$, there is a unary code lying in $\mathcal{G}$.*

Proof. Proposition 2.3.10 of [HHM06]. ☐

The above-mentioned Fact, allows us to think about the imaginaries of the sorts $S_n \cup T_m$ as a sequence of elements of unary sets (with an extra condition). Hence, if we can use the canonical ordering on the main field to induce an ordering on the collection of unary sets, then we are done. The main strategy for the following lemma is to find a generic element for each unary set and use the natural ordering on the main valued ordered field $\mathcal{R}$. In the next Lemma, we see whether the ordering on $\mathcal{R}, k$ can be "carried" to the unary sets. The argument goes by cases:

Lemma 2.4.6. *Let U be a unary set. Then there is an ordering on U induced from the valued field.*

Proof. By definition, a C-unary set U is a $C-1-$torsor or an interval $[0, \alpha)$ in $\Gamma \cup \{\infty\}$.

- In case, U is of the form $[0, \alpha)$ in $\Gamma \cup \{\infty\}$, we have nothing to prove, because of the canonical ordering on the value group which is a divisible ordered abelian group. Hence, there is an ordering involved here.

- In case, U is a $C - 1-$ torsor of a definable $C - 1-$ submodule and U is of the form $\mathcal{O}/\gamma\mathcal{O}$, then U is a set of the form $r + \gamma\mathcal{O}$. Considering that $r \in \mathcal{O}$, define $r + \gamma\mathcal{O} < s + \gamma\mathcal{O}$ if and only if $r < x$ for all $x \in s + \gamma\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ is totally ordered).

- In case, U is a $C - 1-$ torsor of a definable $C - 1-$ submodule and U is of the form $\mathfrak{m}/\gamma\mathfrak{m}$, then U is a set of the form $r + \gamma\mathfrak{m}$, considering that $r \in \mathfrak{m}$, define $r + \gamma\mathfrak{m} < s + \gamma\mathfrak{m}$ if and only if $r < x$ for all $x \in s + \gamma\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ is totally ordered).

The above lemma holds essentially because there is a canonical ordering on $\mathcal{R}$, hence on $\mathcal{O}, \mathfrak{m}$ and k the residue field. With this in mind as well as Lemma 2.4.5, we know that each finite sets tuples has a unary code, and moreover, there is an ordering on the unary sets from the canonical ordering of the valued field. We try to be more constructive here and find the tuple itself. To do that, we use the proof of the Proposition 2.3.10 of [HHM06] in which they find a code for each $\mathcal{O}$-lattice. We use the same code and the ordering on the main field to prove the following lemma.

The following contains three proofs for the Lemma, the first of which is coming from the ordering on the unary sets (e.g. Lemma 2.4). In this approach, we use the ordering on the unary sets to turn a unary code into a tuple with an ordering on the set of such tuples. In the second approach, we don't use the Lemma 2.4, but having a unary code for each imaginary, we use the unary code and the fact that for $s \in S_n$, we find a unary code like $(c_1, b_1, c_{n-1}, b_{n-1}, s)$, but then by the proof of Proposition 2.3.10, s is in a $(c_1, b_1, c_{n-1}, b_{n-1})$-definable unary set, which has a generic point by Lemma 2.4.3, we claim that this generic point is the code for the s. Lastly, in a final version, having defined a unary code $(c_1, b_1, c_{n-1}, b_{n-1})$ for the imaginary in question, by definition, we know that each element is a member of a unary set, then we take the generic points (a_1, a_2, a_3, a_4) as generic points of each unary set which is a tuple by the ordering.

Lemma 2.4.7. *Any finite set of finite tuples of $\mathcal{G}$ is coded in $\mathcal{G}$.*

Proof. I prove the elimination of imaginaries down to the HHM-geometric sorts $\mathcal{G} = \{T_n, S_m, \mathcal{R}\}$. Let $s \in \mathcal{G}$ be a finite set tuples in $\mathcal{G}$. Hence, $s = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$. Because the sorts are either $\mathcal{R}$, $\cup T_n$, or $\cup S_m$, we have three main cases to consider. Let $s_{\mathcal{R}} \subset s$ be the tuples from the real closed field sort, $s_T \subset s$ be the tuples from the $\cup T_n$, and $s_S \subset s$ be the tuples from the $\cup S_m$ sort. The aim is to find a way to turn $s = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ as a set, to a tuple $(s_1, s_2, ..., s_n)$. To do that, we use the canonical ordering on the $\mathcal{R}$. Using the canonical order on $\mathcal{R}$, the finite subset $s_{\mathcal{R}}$ is an ordered set. So, we consider the case of $s_T \subset s$.

Consider $s_T \subset s$. Let $s_T = \{s_{t1}, s_{t2}, ..., s_{tn}\}$. The question is to find a canonical ordering on the set $s_T = \{s_{t1}, s_{t2}, ..., s_{tn}\}$ to get $(s_{t1}, s_{t2}, ..., s_{tn})$. Each $s_{ti} \in s_T$ has a unary code $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{n_{ii}})$. So, say $s_{ti} \leq s_{tj}$ if either (the same argument works for coding the set s_S):

1. $i = j$ and $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{n_{ii}}) = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{n_{jj}})$.

2. $n_i < n_i$.

3. $n_i = n_i$ and if k is the least number such that $n_i \neq n_i$, then $a_{ik} < a_{jk}$ in the sense defined in 2.4.

Now take the $\ulcorner s_{\mathcal{R}} \urcorner \cup \ulcorner s_T \urcorner \cup \ulcorner s_S \urcorner$ as the code for the s. $\square$

2.5 Elimination of Imaginaries for $RCVF$

In this subsection, we put together what was discussed in the last three subsections, the result of which is that $RCVF$ eliminates the imaginaries down to the geometric sorts. Hence, the target is the following theorem:

Theorem 2.5.1. *The theory of $RCVF$ eliminates the imaginaries down to the geometric sorts $\mathcal{G} = \{K, \cup S_n, \cup T_m\}$.*

Proof. We proceed by the criterion mentioned in 2.1. The first condition is verified by 2.2.1. Second condition is verified in 2.3.3. The third one is 2.4.7. Note that the first two conditions are regarding finding codes in $R_{n,l}$s i.e. the Johnson-Geometric sorts. While the third condition is verified with respect to the HHM-geometric sorts. Here, we use the Theorem 2.6.4 of [HHM06] for the first two items to find codes in the HHM-Geometric sorts. Hence, $RCVF$ eliminates imaginaries down to the HHM-Geometric sorts. □

References

[HHM06] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski, and Dugald Macpherson. Definable sets in algebraically closed valued fields: elimination of imaginaries. 2006(597):175–236, 2006.

[HHM08] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski, and Dugald Macpherson. *Stable domination and independence in algebraically closed valued fields / Deirdre Haskell, Ehu Hrushovski, Dugald Macpherson.* Lecture notes in logic ; 30. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Hod93] Wilfrid Hodges. *Model Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[Hol95] Jan E. Holly. Canonical forms for definable subsets of algebraically closed and real closed valued fields. *The Journal of Symbolic Logic*, 60(3):843–860, 1995.

[Hru14] Ehud Hrushovski. Imaginaries and definable types in algebraically closed valued fields, 2014.

[Joh20] Will Johnson. On the Proof of Elimination of Imaginaries in Algebraically Closed Valued Fields. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 61(3):363 – 381, 2020.

[Mar02] D. Marker. *Model Theory : An Introduction.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2002.

[Mel06] T. Mellor. Imaginaries in real closed valued fields. *Annals of Pure and Applied Logic*, 139(1):230–279, 2006.

یک ستاره گودلی در آسمان کریپکی

لطف الله نبوی

دانشگاه تربیت مدرس ،گروه منطق و فلسفه

چکیده: "کورت گودل" پس از اثبات دو قضیه (فراقضیه) مشهور تمامیت و ناتمامیت خود ، دو یادداشت (هر کدام یک صفحه) در باب منطق شهودی(IPC) و به زبان آلمانی در سال ۱۹۳۲ و ۱۹۳۳ منتشر کرد . تز های صریح و غیر صریح متعددی که توسط گودل در این دو یادداشت ارائه شده ، پس از قریب یک سده که از نگارش آن ها می گذرد هنوز یکی از تاثیرگذارترین نوشته ها در گستره "منطق ریاضی" و" منطق فلسفی" است .

یکی از مهمترین تزهای مزبور، تز مشهور گودل تحت عنوان " ترجمان گودلی" (*Gödel translation*) است که به صورت زیر قابل فرمول بندی است :

$$\boxed{\vdash^{IPC} \phi \equiv \vdash^{G} \phi^{\star}}$$

در فرمول مزبور G نظام طراحی شده گودل است که خود معادل نظام موجهاتیS۴ لوئیس است .

فرمول مزبور بدین معناست که:

" هرفرمولی قضیه منطق شهودی است اگر و تنها اگر ترجمان گودلی آن قضیه ای از G یا S۴ باشد"

اثبات تز گودل توسط تارسکی و مک کینزی در سال ۱۹۴۸ زمینه را برای بسط ایده "ترجمان گودلی" در دهه های بعدی بیش از پیش فراهم کرد و در این میان طراحی سیستم Lc و ترجمان گودلی آن یعنی نظام S۴.۳ از یکطرف و سمانتیک بینهایت ارزشی آن از طرف دیگر که همگی توسط " مایکل دامت "در سال ۱۹۵۹ صورت گرفت افق های جدیدی از بحث را در فضای سمانتیک کریپکی و سمانتیک منطق فازی پیش روی منطقدانان قرار داد.

می دانیم نظام LC خود یکی از "منطق های گودلی ابر شهودی میانی" است و در این سخنرانی سعی می شود با رویکردی تحلیلی- تاریخی نحوه جلوه نمایی و نور افشانی آن همچون ستاره ای در آسمان دلالت شناسی کریپکی و منطق فازی به بحث گذاشته شود.

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۶:۴۰ (به وقت محلی تهران)
۱۳:۱۰ (به وقت گرینویچ)

سالن ۳۱۱

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

ماشین تورینگ مجهز به CTC در جهان‌های فیزیکی

سارا بابایی خانه سر[۱]، فرزاد دیده‌ور[۲]
[۱] دانشگاه صنعتی امیرکبیر، sarababaei@aut.ac.ir (۰۹۱۹-۰۳۰۷۶۶۸)
[۲] دانشگاه صنعتی امیرکبیر، didehvar@aut.ac.ir (۰۲۱-۶۴۵۴۵۶۶۵)

چکیده: این پژوهش، جنبه‌های متناقض‌نمای منحنی زمان‌مانند بسته[۱] (CTC) و تأثیر آن بر نظریه‌ی محاسبات مطالعه می‌شود. آرنسون[۲] و همکارانش پس از معرفی ماشین تورینگی که از CTC برای سفر به زمان گذشته بهره می‌برد، $\mathbf{TM_{CTC}}$، ثابت کردند در این مدل محاسباتی، $\mathbf{P = PSPACE}$ بوده و همچنین مجموعه‌های $\mathbf{\Delta_2}$ محاسبه‌پذیر هستند. در این مقاله، سازگاری فیزیکی این مدل مورد نقد قرار گرفته و برای جلوگیری از وجود بی‌نهایت نسخه از هر جزء جهان، اصل قوی مبنی بر لزوم از بین رفتن هر ذره‌ی در حال حرکت روی CTC پیش از بازگشت به نقطه‌ی شروع حرکت خود و اصل ضعیف، بیانگر همین مفهوم به طور خاص برای ماشین‌های تورینگ، معرفی می‌شوند.
یک پیامد برقراری «اصل ضعیف»، معتبر نبودن اثبات‌های مربوط به پیچیدگی و محاسبه‌پذیری $\mathrm{TM_{CTC}}$، به علت ناتوانی ماشین‌های تورینگ در انتقال اطلاعات در یک دور کامل CTC است. راه حلی تحت عنوان فرض انتقال اطلاعات برای این مشکل پیشنهاد می‌شود که در آن از یک $\mathrm{TM_{CTC}}$ دیگر به عنوان واسطه‌ای برای ذخیره‌ی داده‌ها استفاده می‌شود. در نهایت، پیش‌نیاز این فرض که وجود مفهوم ماشین‌های تورینگ در طول زمان است، بررسی و در مورد شرایط فیزیکی ممکن برای جهانی مجهز به CTC بحث می‌شود.

کلید واژه‌ها: ماشین تورینگ، منحنی زمان‌مانند بسته، اصل قوی، اصل ضعیف، فرض انتقال اطلاعات.

Introduction

Physical phenomena can be explained in variant types of space-times, such as flat, like Minkowski, or curved space-times. In each of them, numerous properties may appear, such as chronology-violating, meaning that an event a preceding an event b might occur after b. An example of the chronology-violating space-times we want to study in this paper is a universe containing CTCs, which entails curved space-time.

1. Closed Time-like Curve
2. S. Aaronson

A vector $v = (x, y, z, t) = (\vec{d}, t)$ in space-time, demonstrating a movement with spatial difference $\vec{d}$ in time t, is **time-like** if $|\vec{d}| < ct$, meaning that $\vec{d}$ has been taken with a velocity less than light's and can be in a particle's world-line.

A **Closed Time-like Curve**, or **CTC** for short, is a time-like line with the same starting and ending points. Since it is time-like, it can be a particle's world line. Any particle of the system owning this kind of world line may return to a state of its past, or in other words, a coordinate of space and time that has been before.

The possibility of the existence of CTCs was raised for the first time by a dutch mathematician, *Willem Jacob van Stockum*. [13] After that, *Kurt Gödel* introduced the Gödel metric as a solution to Einstein's field equations, expressing a universe containing CTCs. [7] Factually, Einstein formulated the **field equations**, also known as **EFE**, within the general theory of relativity in [5]. Since then, several solutions have been found for EFE, which are called metrics. These solutions tend to describe universes that include exotic features; for instance, black holes in the Schwarzschild metric, traversable wormholes in the Morris–Thorne metric, and CTCs in the Gödel metric.

Intuitively, a space-time equipped with CTCs provides the possibility of traveling back in time. Similar to someone starting going rightward on the spherical earth and finally reaching a coordinate lefter than their departure point, a particle of the system can enter the CTC and move forward on it and, by the passage of time, since CTC is closed, eventually arrives at a time before its travel's starting. [12] This feature causes several paradoxes, such as consistency [1][9], Fermi[22] [10], Newcomb [14][3], causality loop [11], and knowledge creation [2].

Various methods have been introduced to eliminate associated paradoxes with CTCs, for instance, **Novikov's self-consistency principle.** [6] Based on the **fixed-point** approach that *Deutsch* proposed [4], *Aaronson* introduced $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$ and suggested a $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$ program to solve the halting problem. [2]

The Problem and Proposed Solution

We bring up doubts, as a result of our universe's physical constraints, about the proof of computability of the halting problem with $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$.

Suppose a particle x of a universe containing CTCs, is born at t_0 and goes toward the future until t_{-1}, a time before its birth. Then, if x continues its motion on the CTC and reaches t_0 without any damage, assuming that all the other

22 For given answers to this paradox, see [12] and [8].

particles in the first visit of t_0 by x are identical to the second turn, x will be born again. Thus, there will be two x's in the universe. Likewise, the movement of both x's toward the future leads to having infinitely many x's, which seems impossible.

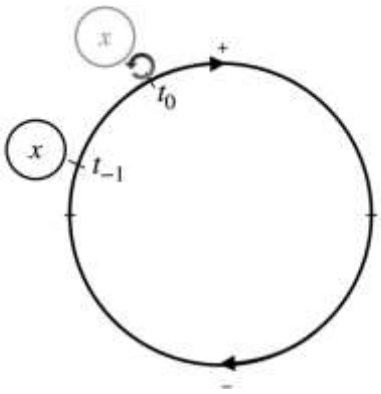


Fig. 1: The motion of a particle x on a CTC.

Similarly, if a $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$ running the halting problem program starts its computation at t_0 with a $\langle P \rangle$ on R_{CR}, and a y on its $\mathrm{R}_{\mathrm{CTC}}$ returns to t_0, by the above argument, there will be infinitely many of it in the world.

Consequently, the following axioms can be stated for a classical universe containing CTCs:

Strong Axiom: No particle survives a full round of movement on a CTC and will be destroyed before returning to its starting point in space-time.

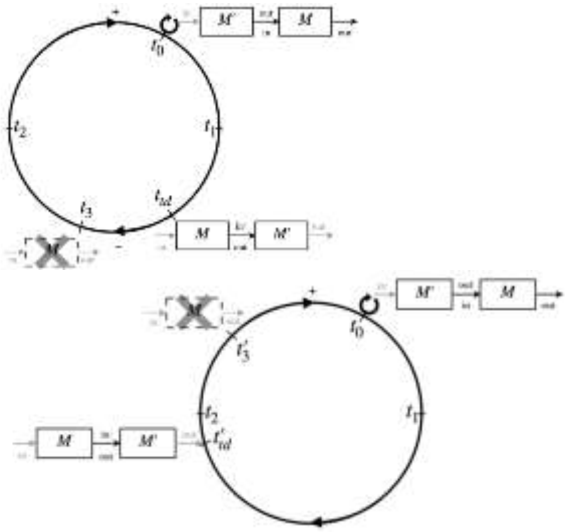
Weak Axiom: Every Turing machine rounding on a CTC, will be destroyed before returning to its starting point in space-time.

Premising the *weak axiom*, no $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$ is able to use information from the future. Meaning that y will not get any closer to a halting history.

To solve the problem, assume a $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$, M, starts its calculation at t_0, moves in positive time until t_1, continues moving in negative time, reaches $t_2 \leq t_0$ and moves again in positive time to reach t_1. From the *weak axiom*, M will be destroyed at t_3 when $t_2 \leq t_3 \leq t_1$ and M is moving in negative time, or t'_3 when $t_2 \leq t'_3 \leq t_0$ and M is moving in positive time.

Suppose another $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$, M', can be placed in M's path before reaching t_3 or t_3', which we call the **data transferring hypothesis**. The calculated output of M until that moment can be used as input of M', which will move from t_3 or t_3' to t_0, when it gives its data as input of M.

Within this, M can use the information gathered by moving on a CTC, and the given proofs of $\mathrm{TM}_{\mathrm{CTC}}$ will be valid.



(a) (b)

Fig. 2: Data transferring between Turing machines M and M'.

A prerequisite of the data transferring hypothesis is the existence of Turing machines throughout time; since otherwise, in the first round of the CTC, there was no Turing machine in space-time until 1936, when Turing machines were invented. However, in the subsequent rounds, there should exist at least one Turing machine at every moment, including before 1936, to establish the data transferring hypothesis. This leads to visiting dissimilar universes in different cycles on the CTC.

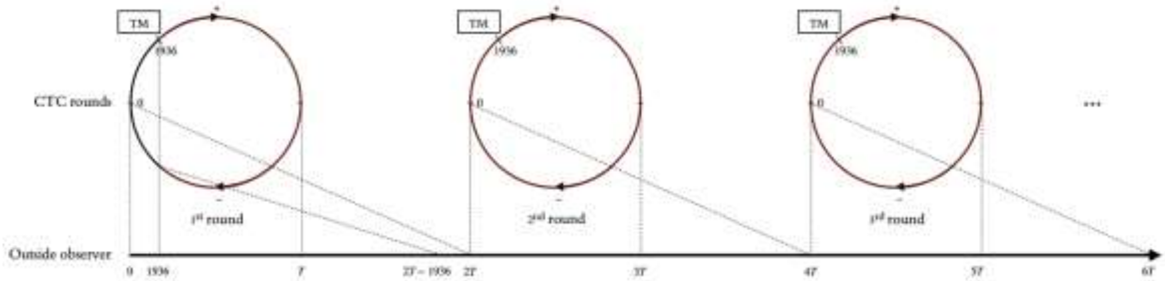


Fig. 3: The different cycles the *data transferring hypothesis* requires. Red lines show the time that Turing machines exist which is not the same in the first and second rounds.

Also, the assumption that CTC does not return to a specific moment is rigid. Therefore, It is reasonable to discuss other models in which the starting and ending points are not necessarily similar.

(a) (b)

Fig. 4: Chronology-violating models rather than CTC.

By the above, the data transferring hypothesis also seems like not possible in our universe. So, we will discuss possible situations that a universe containing CTCs may have in the next section.

Possible Situations

We discuss possible cases for a universe equipped with CTC. There might be other missed cases, and we request readers notify us if they attained any other reasonable scenario.

The *weak axiom* without further conditions

In this case, although the *data transferring hypothesis* would be a helpful claim in possible universes, it does not work in our world.

Returning to an approximately equivalent universe

Supposing some items of the universe, such as the existence of Turing machines, can be different in two rounds on CTC, the prerequisites for the *data transferring hypothesis* will be held and deduced results in [1] and [2] are valid.

The *weak axiom* in the last possible moment

Assuming particles on CTC can move in both time directions until returning just before their birth moment, when they are destroyed and immediately recreated, the problem remains for Turing machines.

Transferring data between various Turing machines

Implementing the *data transferring hypothesis* amongst more than two Turing machines requires the existence of Turing machines at every moment of the cycle. Therefore, the problem still remains.

Transferring data between different time directions

The possibility of the *data transferring hypothesis* between a Turing machine moving in the positive and one in the negative direction of time eliminates the necessity of the existence of Turing machines at all times and solves the problem. Nevertheless, it is unlikely to be feasible.

Conclusion

After studying the definition of CTC, we considered the proof of computability of the halting problem by TM_{CTC} in [2]. It raised the physical objection discussed as *weak axiom* and *strong axiom*, leading to the inability of TM_{CTC} to solve Δ_2 sets.

We tried to address this issue using the *data transferring hypothesis*, which also required other infeasible conditions.

Finally, we reviewed the possible physical scenarios as far as we could think of for a universe containing CTC, albeit there might be additional scenarios that we welcome being acquainted with.

References

Aaronson, S. (2005). Guest column: NP-complete problems and physical reality. *ACM Sigact News, 36* (1), 30-52.

Aaronson, S., Bavarian, M., & Gueltrini, G. (2016). Computability theory of closed timelike curves. *arXiv preprint arXiv:1609.05507*.

Craig, W. L. (1988). Tachyons, time travel, and divine omniscience. *The Journal of Philosophy, 85* (3), 135-150.

Deutsch, D. (1991). Quantum mechanics near closed timelike lines. *Physical Review D, 44* (10), 3197–3218.

Einstein, A. (1916). The foundation of the general theory of relativity. *Annalen der physik, 49*, 769-822.

Friedman, J., Morris, M. S., Novikov, I. D., Echeverria, F., Klinkhammer, G., Thorne, K. S., & Yurtsever, U. (1990). Cauchy problem in spacetimes with closed timelike curves. *Physical Review D, 42* (6), 1915.

Gödel, K. (1949). An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation. *Reviews of Modern Physics, 21* (3), 447–450.

Hawking, S. W. (1999). Space and time warps (public lecture). https://www.hawking.org.uk/in-words/lectures/space-and-time-warps: The Stephen Hawking Estate.

Hawking, S. W., & Ellis, G. F. (1973). *The large-scale structure of space-time.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Jones, E. M. (1985). "Where is everybody?" an account of fermi's question. *Los Alamos National Lab., NM* (USA).

Lobo, F., & Crawford, P. (2003). Time, closed timelike curves and causality. *In The nature of time: Geometry, physics and perception* (p. 289-296). Springer.

Smith, N. J. (2021). Time travel. In E. N. Zalta (Ed.), *The stanford encyclopedia of philosophy* (Fall 2021 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/time-travel/.

van Stockum, W. J. (1938). Ix.—the gravitational field of a distribution of particles rotating about an axis of symmetry. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 57, 135-154.

Wolpert, D. H., & Benford, G. (2013). The lesson of newcomb's paradox. *Synthese, 190* (9), 1637–1646.

Martin's Maximum, Woodin's P_max axiom (*), and Cantor's Continuum Problem

Ralf Schindler
University of Münster

Abstract: In 2019, D. Asperó and the speaker showed that Martin's Maximum^++ implies the P_max axiom (*). This amalgamated two prominent maximality principles which before had often been considered as competitors. We provide some background, give a hint about the proof method, and mention further developments and open questions for future research. We also discuss to which extent our result has a philosophical impact, in particular concerning the question as to how many real numbers there are.

آنلاین

زمان ارائه
پنجشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۹:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۵:۵۰ (به وقت گرینویچ)

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

A Galois connection between Turing jumps and limits

Vasco Brattka
University of the Bundeswehr Munich

Abstract: We discuss a Galois connection between Turing jumps and limits that offers a fresh view on the class of limit computable functions and its properties. This view does not only offer simplified proofs of many known classical results in computable analysis, but also new insights. With this approach we also propagate a more uniform view on computability theory in general.

آنلاین

زمان ارائه
پنجشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۰:۴۰ (به وقت محلی تهران)
۷:۱۰ (به وقت گرینویچ)

About a Proof ($\mathbf{TC + CON(TC^*) \vdash (P \neq NP)}$)

Farzad Didehvar
Amir Kabir University (Tehran Polytechnic)
didehvar@aut.ac.ir

Abstract: In this talk, we introduce Theory of Fuzzy Time Computation (TC^*). We show this theory is as plausible as Theory of Computation (TC) in Modeling Physical world. As an advantage, we show TC^* is a better theory to consider for Complexity Theory problems respect to TC. More exactly, first we define the correspondent complexity classes in the new theory as P^*, NP^*, BPP^*, MA^*, AM^*[1], [3], [5], [6], [7].
In the novel Theory, We prove $P^* = BPP^*$, $MA^* = AM^*$ [3].
As the major result of this talk, we show $TC + CON(TC^*) \vdash (P \neq NP)$ [4]. We try to explain the details of the proof.
We provide a reason to show $CON(TC^*)$ is plausible in the real world. To do that, we introduce a novel interpretation of Quantum Mechanics (Fuzzy time-Particle interpretation of Quantum Mechanics) [2]. In addition to the above, some Mathematician and Philosophers like Brouwer and Husserl believed some ideas similar to the Fuzziness of Time [8].
Keywords: TC^*, scope*, $P \neq NP$, $P^* \neq NP^*$, Fuzzy time

Refrences:
1. L.Babai "TRADING Group Theory for Randomness", STOC'85: Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Theory of Computing, ACM, pp.421-429, 1985
2. F.Didehvar, Computing Fuzzy Time Function, SSRN, 2022
3. F.Didehvar, Theory of Fuzzy Time Computation 〖(TC〗^*), HAL (Id: hal-03962654), 2023
4. F.Didehvar, Theory of Fuzzy Time Computation (2), SSRN,2023
5. O.Goldreich, In a world of P=BPP
6. O.Goldreich, Studies in Complexity and Cryptography: Miscellanea on the interplay between Randomness and Computation , Vol 6650 of Lecture Notes in Computer Science, Springer 2011, P 43.
7. S.Goldwasser; M.Sipser "Private coins versus public coins in interactive proof systems", STOC'86: Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of Computing, ACM, PP.59-68, 1986
8. Van Aten M, On Brouwer, Wadsworth Philosopher's Series, 2004

زمان ارائه
پنجشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۱:۴۰ (به وقت محلی تهران)
۸:۱۰ (به وقت گرینویچ)

آنلاین

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

On the benefit of sound proofs based on unsound rules

Matthias Baaz

Vienna University of Technology

Abstract: Hilbert's definition of a proof of A as a sequence of formulas A_1,A_2, ... where every formula is an axiom or immendiate consequence of formulas with lower index and A last formula dates back to Hilbert's Geometry. (This is the origin of the axiomatic method in mathematics.). In contrast to earlier more global notions of proof every subsequence is a proof in its own right. Therefore, the soundness of a proof can be established by induction on the length of the proof, i.e. soundness and completeness results are not symmetric in complexity. In this lecture sound proofs based on unsound rules - in contrast to the Hilbet concept - are investigated. The rules are based on relaxed eigenvariable conditions and the soundness of the proofs are guaranteed by global constraints. A non-elemtarily bounded speed-up of cut free proofs with these rules w.r.t cut free proofs with the usual Lk-rules is established. Furthermore, it is shown, that such relaxations of eigenvariable conditions are necessary to develop analytic calculi for quantifier macros or Henkin quantifiers.

زمان ارائه

پنجشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱

۱۴:۰۰ (به وقت محلی تهران)

۱۰:۳۰ (به وقت گرینویچ)

آنلاین

A property for minimal but not strongly minimal structures

Nazanin Roshandel Tavana
Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

Abstract: For a countable first order language L, an infinite L-structure is minimal if every definable subset with parameters in M is finite or cofinite. A minimal structure M is strongly minimal if every elementarily equivalent structure to M is minimal. It is obvious that every strongly minimal structure is minimal. But there are some examples of minimal but not strongly minimal structures, as (ω, <). The question which is studied in this peper is as follows.

Q: Let M and N are minimal but not strongly minimal structures with M ≡ N. Then, is M ≅ N? This conjecture is due to A. Nurtazin from 2004.

In this article, This conjecture will be rejected.

Keywords: Minimal but not strongly minimal structure, Hrushovski construction.

If $\mathcal{M}$ is a minimal but not strongly minimal structure then there is a formula $\varphi(x,\bar{y})$ such that M has arbitrarily large subsets of the form $\varphi(M,\bar{a})$, where

$$\varphi(M,\bar{a}) = \{x \in M : \ M \models \varphi(x,\bar{a})\}.$$

At the first stage, we assume $|\ \bar{y}\ | = 1$. Define

$$A_i = \{a \in M : |\ \varphi(M,a)\ | = i\},$$

and

$$B_i = \{a \in M : |\ \neg\varphi(M,a)\ | = i\}.$$

Observe that each A_i and B_i is $\emptyset$-definable, so by minimality, is finite or cofinite.

Claim 1. *Each set A_i and B_i is finite.*

Proof. Suppose this is fals. So, some A_i or B_i is cofinite. This yields there are finitely many different sizes of sets $\varphi(M,y)$ as y varies, a contradiction. □

Claim 2. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i) = M$.

Proof. Suppose $a \in M\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i)$. Then, both $\varphi(M,a)$ and $\neg\varphi(M,a)$ are infinite, contradicting minimality of M. □

It follows that M is a union of the finite $\emptyset$-definable sets $D_i = A_i \cup B_i$. Likewise, if $N \equiv M$ is minimal then for the same reason N is the union of the finite $\emptyset$-definable sets D_i^N. Since $D_i^M \equiv D_i^N$, for each i, we have $D_i^M \cong D_i^N$. Konig lemma implies that $M \cong N$.

At the second stage, we should prove this for $| y |> 1$. It is an immediate result of the modification of some theorems in [1]. This article uses Hrushovski method to refuse Zilber's conjecture. Actually, a minimal but not strongly minimal structure with non-zero dimension is constructed in this paper.

Let L consists of a ternary relation, R. Define $y(A) =| A | - | R^A |$ and $y(A/B) = y(A \cup B) - y(B)$. The set B is called closed in M if for every finite $X \subset M$, $y(X/B) \geq 0$. For every finite $A \subset M$, there exists a unique smallest finite $B \supset A$ with $B \leq M$ which is denoted by $cl_M(A)$. Also, define $d_M(A) = y(cl_M(A))$ and $d_M(A/B) = d_M(AB) - d_M(B)$.

Definition 0.1. 1. $\mathbb{K}$ is the class of all finite L-structure such that for every nonempty $X \subset A$, $y(X) \geq 0$.

2. Fix n with $0 < n < \omega$. We can take a biminimal pair (C^*, F^*) such that $C^* \cup F^* \in \mathbb{K}$, $y(F^*) = n + 1$, and $| C^* |> 1$. Choose a function μ from isomorphism types of bimimal pairs except (C^*, F^*) to ω with the property $\mu(C, F) \geq y(F)$. Also, for any L-structure A and any copy F of F^* in A, define

$$\rho_A(F) = \max\{k \leq| A - F |: F \leq_k A\} \cup \{n + 1\}.$$

Then, $B \in \mathbb{K}_n$ iff

1. $B \in \mathbb{K}$, and

2. for every biminimal pair (C, F) with $F \subset B$, if $(C, F) \ncong (C^*, F^*)$ then $\chi_B(C/F) \leq \mu(C, F)$, else, $\chi_B(C/F) \leq \rho_B(F)$.

So, $\mathbb{K}$ and also $\mathbb{K}_n$ have free amalgamation property.
Moreover, there is a generic structure M such that every finite substructure of M is in $\mathbb{K}_n$, with strong embedding and closed under substructure. This structure is saturated and not minimal.

Now, by genericity of M, one can take $I \subset M$ with $d_M(I) = \mid I \mid = n$. Fix a prime $M_n \prec M$ over I. Then, M_n is a minimal structure with $dim(M_n) = n$.

For every $k < n$, one can modify the proof and get a minimal structure $M_k \prec M$ with $dim(M_k) = k$. Thus, $M_k \equiv M_n$ but $M_k \ncong M_n$. Therefore, it rejects the conjecture.

References

[1] K. Ikeda, *Minimal but not strongly minimal structures with arbitrary finite dimensions*, The journal of symbolic logic, Vol. 66(1), 2001.

[2] O.V. Belegradek, *On minimal structures*, Journal of symbolic logic, Vol.63, pp. 421–426, 1996.

[3] E. Hrushovski. *A new strongly minimal set*, Annals of Pure and Applied Logic, Vol.52, pp.147–166, 1993

Surprising or Predictable? Weak Systems Have Hard Theorems

Raheleh Jalali
Utrecht University

Abstract: Given a proof system, how can we specify the "hardness" of its theorems? One way to tackle this problem is taking the lengths of proofs as the corresponding hardness measure. Following this route, we call a theorem hard when even its shortest proof in the system is "long" in a certain formal sense. Finding hard theorems in proof systems for classical logic has been an open problem for a long time and is highly related to the famous P versus NP problem. However, in recent years, as a significant progress, many superintuitionistic and modal logics have been shown to have hard theorems. In this talk, we will extend the aforementioned result to also cover a variety of weaker logics. We show that there are theorems in the usual calculi for many substructural logics and basic propositional logic, BPC, that are even hard for the intuitionistic systems.

زمان ارائه

پنجشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱

۱۶:۰۰ (به وقت محلی تهران)

۱۲:۳۰ (به وقت گرینویچ)

آنلاین

دهمین همایش سالیانه انجمن منطق ایران
دانشگاه امیرکبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۳ و ۴ اسفند ۱۴۰۱

Subordination Algebras as Semantic Environment of Input/Output Logic

Andrea De Domenico[1], Ali Farjami[2], Krishna Manoorkar, Alessandra Palmigiano, Mattia Panettiere, and Xiaolong Wang
1. Vrije Universiteit, Amsterdam
2.Iran University of Science and Technology

Abstract: Input/output logic has been introduced as a formal framework for modelling the interaction between logical inferences and other agency-related notions such as conditional obligations, goals, ideals, preferences, actions, and beliefs. This framework has been applied mainly in the context of the formalization of normative systems in philosophical logic and AI. Although, initially, this framework was intended "not [for] studying some kind of non-classical logic, but [as] a way of using the classical one", its generality and versatility makes it very suitable to support a range of enhancements in its expressiveness, such as those brought about by the addition of modal operators. Moreover, recently, there has been an interest in studying the interaction between the agency-related notions mentioned above with various forms of nonclassical reasoning. This interest has contextually motivated the introduction of algebraic and proof-theoretic methods in the study of input/output logic.

Keywords: input/output logic; subordination algebra; modal logic; Sahlqvist theory

آنلاین

زمان ارائه
پنجشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۷:۰۰ (به وقت محلی تهران)
۱۳:۳۰ (به وقت گرینویچ)

In this talk, we contribute to the latter research direction in the mathematical background of input/output logic (as defined in [11]) by introducing an algebraic semantics for it, based on (generalizations of) *subordination algebras* [1]. These can be defined as tuples $(A, \prec)$ such that A is a Boolean algebra and $\prec$ is a binary relation on A such that the direct (resp. inverse) image of each element $a \in A$ is a filter (resp. an ideal) of A. Subordination algebras are equivalent presentations of pre-contact algebras [10] and quasi-modal algebras [2, 3]. Since their introduction, subordination algebras have been systematically connected with various modal algebras (i.e. Boolean algebras expanded with semantic modal operators). This has made it possible to endow various modal languages with algebraic semantics based on subordination algebras, and use these languages to axiomatize the properties of these subordination algebras. In particular, Sahlqvist-type canonicity for modal and tense formulas on subordination algebras has been studied in [8] using topological techniques; in [9], using algebraic techniques, the canonicity result of [8] was strengthened and captured within the more general notion of canonicity in the context of *slanted algebras*, which was established using the tools of *unified correspondence theory* [5, 6, 7]. Slanted algebras are based on general lattices, and encompass variations and generalizations of subordination algebras such as those very recently introduced by Celani in [4], which are based on distributive lattices, and for which Celani develops duality-theoretic and correspondence-theoretic results.

In this talk, we propose a semantic framework in which the subordination relations $\prec$ of (proto-)subordination algebras interpret the normative system N of input/output logic. This makes it possible to conceptually interpret the meaning of $\prec$ in terms of the behaviour of systems of norms, to systematically relate rules of N with properties of $\prec$, and to interpret the output operators induced by N as the modal operators associated with $\prec$. We characterize a number of basic properties of N (or of $\prec$) in terms of modal axioms in this language. Interestingly, some of these properties are well known in the literature of input/output logic, since they capture intuitive desiderata about the interaction between norms and logical reasoning; some other properties originate from purely mathematical considerations, and have been dually characterized in Celani's correspondence-theoretic results in [4]. Thanks to the embedding of subordination algebras in the more general environment of slanted algebras, we have a mathematical environment for systematically exploring the interaction between norms and different modes of reasoning, and a systematic connection with families of logical languages which can be applied in different contexts to axiomatize the behaviour of various generalized systems of norms; this more general environment allows to also encompass results such as Celani's correspondence for subordination lattices as consequences of *standard* Sahlqvist modal correspondence.

Similar to the duality between necessity and possibility in modal logic, the notion of conditional permission (sometimes referred to as negative permission) has been introduced as dual to conditional obligation: "a code permits something with respect to a condition iff it does not forbid it under that same condition, i.e. iff the code does not require the contrary under that condition" [12]. The duality between subordination relations and pre-contact relations [10] allows us to propose precontact relations for modelling conditional permission. Time permitting, we will discuss the relationship between pre-contact algebra and different concepts of permissions proposed by Makinson and van der Torre [12].

سالن ۳۱۳

زمان ارائه
چهارشنبه، ۳ اسفند ۱۴۰۱
۱۶:۲۰ (به وقت محلی تهران)
۱۲:۵۰ (به وقت گرینویچ)

References

[1] Guram Bezhanishvili, Nick Bezhanishvili, Sumit Sourabh, and Yde Venema. Irreducible equivalence relations, gleason spaces, and de vries duality. *Applied Categorical Structures*, 25(3):381–401, 2017.

[2] Sergio Celani. Quasi-modal algebras. *Mathematica Bohemica*, 126(4):721–736, 2001.

[3] Sergio Celani. Precontact relations and quasi-modal operators in boolean algebras. volume Actas del XIII congreso "Dr. Antonio A. R. Monteiro", Bahía Blanca: Universidad Nacional del Sur, Instituto de Matemática, page 63–79, 2016.

[4] Sergio A Celani. Subordination on bounded distributive lattices. *Order*, pages 1–27, 2022.

[5] Willem Conradie, Silvio Ghilardi, and Alessandra Palmigiano. Unified correspondence. In *Johan van Benthem on logic and information dynamics*, pages 933–975. Springer, 2014.

[6] Willem Conradie and Alessandra Palmigiano. Algorithmic correspondence and canonicity for non-distributive logics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 170(9):923–974, 2019.

[7] Willem Conradie and Alessandra Palmigiano. Constructive canonicity of inductive inequalities. *Logical Methods in Computer Science*, 16, 2020.

[8] Laurent De Rudder, Georges Hansoul, and Valentine Stetenfeld. Subordination algebras in modal logic. *arXiv preprint arXiv:2004.14919*, 2020.

[9] Laurent De Rudder and Alessandra Palmigiano. Slanted canonicity of analytic inductive inequalities. *ACM Transactions on Computational Logic (TOCL)*, 22(3):1–41, 2021.

[10] Georgi Dimov and Dimiter Vakarelov. Topological representation of precontact algebras. In *International Conference on Relational Methods in Computer Science*, pages 1–16. Springer, 2005.

[11] David Makinson and Leendert van der Torre. Input/output logics. *Journal of Philosophical Logic*, 29(4):383–408, 2000.

[12] David Makinson and Leendert van der Torre. Permission from an input/output perspective. *Journal of Philosophical Logic*, 32(4):391–416, 2003.

[13] Xavier Parent, Dov Gabbay, and Leendert van der Torre. Intuitionistic basis for input/output logic. In *David Makinson on Classical Methods for Non-Classical Problems*, pages 263–286. Springer, 2014.

[14] Audun Stolpe. A concept approach to input/output logic. *Journal of Applied Logic*, 13(3):239–258, 2015.

[15] Xin Sun. Proof theory, semantics and algebra for normative systems. *Journal of logic and computation*, 28(8):1757–1779, 2018.